Д. Бернулли

ОПЫТ НОВОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ ЖРЕБИЯ

D. BERNOULLI

SPECIMEN THEORIAE NOVAE
DE MENSURA SORTIS *

§ 1. С тех пор, как геометры[1] занялись измерением жребия, все они утверждают: *оценку ожидания получим, если умножим оценки отдельных ожидаемых значений на число тех случаев, когда они могут произойти, и сумму полученных произведений разделим на число всех возможных случаев; при этом предполагается, что рассматриваемые случаи являются в равной степени возможными.*[2] Если мы примем это правило, то дальнейшее развитие метода, очевидно, сводится к тому, чтобы перечислять вообще все мыслимые случаи, затем подразделять их по одинаковой степени возможности и в соответствии с этим классифицировать.

---

* Commentarii academiae scientiarium imperialis Petropolitanae. T. V. Petropoli, 1738. P. 175—192. Перевод выполнен по тексту немецкого издания Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen von Daniel Bernoulli, übersetzt und durch Anmerkungen erläutert von Alfred Pringsheim. Leipzig: Duncker & Humblot, 1896. S.60 — с исправлением отдельных неточностей по латинскому оригиналу. Автор примечаний к статье П. А Ватник.

[1] Геометрами назывались все математики.

[2] Здесь описано математическое ожидание: если отдельным значениям x_j, $j = 1,2,\ldots$ случайной величины x соответствуют вероятности p_j, то математическое ожидание равно

$$M\,[X] = \sum_j p_j x_j = \Big(\sum_j n_j x_j\Big)/n,$$

где n_j — число равновероятных исходов, при которых наблюдаются соответствующие значения случайной величины, а $n = n_1 + n_2 + \ldots$ — общее число исходов. Математическое ожидание как основная характеристика случайной величины рассматривалось предшественниками Бернулли; термин «математическое ожидание» введен позднее Лапласом.

§ 2. Многочисленные доказательства, которые приводились для этого правила, при тщательной проверке всегда оказывались основанными на следующей гипотезе: *если два лица чего-нибудь ожидают, то нет никакой причины, по которой один из них имел бы преимущество перед другим, поэтому шансы обоих следует считать равными*; личные обстоятельства каждого из них при этом не имеют значения, а всё зависит от обстоятельств наступления ожидаемого события.

Подобное суждение могло бы быть постановлением, вынесенным верховным общественным судьей, но ведь здесь речь идет не о *судебных решениях*, а о *рекомендациях*, а именно — о правилах, посредством которых каждый сам мог бы оценить свой жребий в зависимости от состояния своих дел.

§ 3. Чтобы показать справедливость этого замечания, предположим, что бедняку выпал жребий, по которому он с равной вероятностью может или не получить ничего, или выиграть 20000 дукатов. Даст ли он этому жребию оценку в 10000 дукатов и будет ли его поступок неразумным, если он продаст этот жребий за 9000 дукатов? Мне так не кажется, хотя, с другой стороны, я полагаю, что очень богатый человек упустил бы свою выгоду, если бы отказался приобрести этот жребий за такую цену. Но если в этом случае я прав, то становится очевидной невозможность оценить жребий таким образом, чтобы эта оценка подходила для всех людей, а отсюда прежде всего следует, что мы должны отвергнуть правило, приведенное в § 1. Но, как может при серьезном размышлении убедиться каждый, применяемый в этом правиле термин «оценка» может быть определен так, что всё это правило, без сомнения, будет приемлемо для всех; действительно, оценка измеряется не ценой вещи, а выгодой, которую каждый из нее извлекает. Цена определяется самой вещью и одинакова для всех, а выгода зависит от личных обстоятельств. Так, без сомнения, для бедного доход в тысячу дукатов имеет большее значение, чем для богатого, в то время как его денежная ценность одинакова для обоих.

§ 4. Теперь мы продвинули этот вопрос настолько, что каждый уже мог бы всё остальное найти самостоятельно, изменив вышеуказанный термин; но поскольку моя гипотеза нова, она требует еще некоторых пояснений. Поэтому я попытаюсь объяснить, как я представляю себе этот вопрос; при этом в качестве основного правила нам должно служить следующее положение: *если мы умножим отдельные кажущиеся возмож-*

ными выгоды на число случаев, в которых они могут наступить, и разделим сумму этих произведений на число всех возможных случаев, то получим среднюю выгоду, а доход, соответствующий этой выгоде, будет равнозначен оцениваемому жребию.

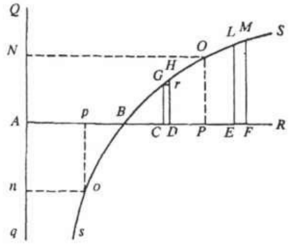
§ 5. Но тогда получается, что невозможно измерить жребий, если при этом неизвестна *выгода*, которую каждый извлекает из *выигрыша*, и наоборот, не может быть указан *выигрыш*, который необходим для достижения определенной *выгоды*, — это все вещи, о которых едва ли можно сказать что-нибудь определенное, так как они могут зависеть от различных обстоятельств.

Так, например, в большинстве случаев одинаковый выигрыш приносит бедному больше пользы, чем богатому; тем не менее для пленника, который уже имеет 2000 дукатов, но для обретения свободы ему требуется еще столько же, выигрыш в 2000 дукатов может быть более ценен, чем для менее богатого человека. Однако примеры такого рода, хотя их и можно было бы придумать бесчисленное множество, в действительности встречаются редко. Поэтому мы будем рассматривать только такие случаи, которые встречаются обычно; при этом для облегчения восприятия предположим, что состояние человека увеличивается непрерывно лишь посредством последовательных добавлений бесконечно малых приращений. Но в таком случае весьма вероятно, что *любой малый выигрыш дает выгоду, которая обратно пропорциональна уже имеющемуся состоянию.* Для пояснения этой гипотезы я должен прежде всего сказать, что под состоянием я понимаю здесь все то, что может дать пищу, одежду, удобства, даже роскошь и возможность удовлетворить какие-либо желания. В соответствии с этим мы не можем, собственно, ни о ком сказать, что он не имеет совсем ничего, если только он как раз сейчас не умирает с голоду, и для большинства людей основную часть их состояния составляет их работоспособность, которая включает в себя также и способность к попрошайничеству: того, кто попрошайничеством добывает ежегодно 10 золотых гульденов, трудно убедить при условии никогда больше не попрошайничать или не добывать чего-нибудь каким-либо иным способом, принять сумму в 50 золотых гульденов и тем самым лишить себя возможности существовать дальше, когда они кончатся; и даже если некто совершенно ничего не имеет и к тому же погряз в долгах, я позволю себе усомниться в том, что при таком условии он принял бы оплату своих долгов, даже с еще значительно бо́льшим денежным подарком впридачу. Но если нищий не хочет согласиться на вышеуказанное условие, если только он не получит чистыми по крайней мере 100 золотых гульденов, а погрязший в долгах соглашается на это условие лишь в том случае, если он получит 1000 золотых гульденов, мы должны будем сказать, что состояние первого составляет 100, а второго 1000 гульденов, хотя по обычному словоупотреблению один из них не имеет ничего, а второй — еще меньше, чем ничего.

§ 6. После формулировки этого определения я возвращаюсь к утверждению предыдущего параграфа, а именно: если нет никаких необычных условий, то *выгода, полученная из сколь угодно малого выигрыша, может считаться обратно пропорциональной имеющемуся состоянию.*

Более внимательное изучение человеческой природы действительно показывает, что это положение применимо в большинстве случаев. Лишь немногие люди не используют полностью свой годовой доход. Предположим, что некто имеет состояние в 100000 дукатов, а другой — такое же количество полудукатов. Тогда, если первый получает ежегодный доход в 5000 дукатов, а второй — опять такое же количество полудукатов, то совершенно очевидно, что для первого целый дукат значит ровно то же, что для второго полудукат, и поэтому доход в целый дукат для первого не представляет большей ценности, чем доход в полудукат — для второго. Следовательно, если каждый из них обоих получает выигрыш в *один* дукат, то для второго выгода возрастает *вдвое*, поскольку он выигрывает *два* полудуката. Так как этот пример иллюстрирует все другие случаи, я считаю излишним приводить дальнейшие примеры. Вышеуказанное положение является тем более правильным, что большинство людей не имеет никакого другого достояния, кроме своей работоспособности, и живет только за ее счет. Конечно, есть также и такие люди, которые больше дорожат *одним* дукатом, чем некоторые другие, хотя и менее богатые, но щедрые, — *несколькими* дукатами. Но мы все время имеем в виду одного и того же человека, и потому не будем останавливаться на подобных вопросах. Далее, очевидно, что тот, кто меньше радуется выигрышу, спокойнее переносит и проигрыш. Вместе с тем иногда могут существовать особые условия, из-за которых дело может обстоять иначе, и чтобы охватить все случаи, я сначала проведу рассмотрение весьма обобщенно и лишь после этого перейду к нашей частной гипотезе.

§ 7. Пусть (см. рис.) отрезок прямой AB обозначает состояние, имевшееся перед наступлением выигрыша, о котором идет речь. Затем построим над продолжением BR отрезка AB кривую



BGS, ординаты которой CG, DH, EL, FM и т. д. показывают выгоды, которые соответствуют изображенным в виде абсцисс выигрышам BC, BD, BE, BF и т. д. Далее m, n, p, q и т. д. являются числами, показывающими, как часто могут наступать выигрыши BC, BD, BE, BF и т. д., тогда (согласно § 4) средняя выгода будет представлена выражением:

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}.$$

Если мы проведем прямую AQ перпендикулярно прямой AR и отложим на ней $AN = PO$, то отрезок $NO—AB$, т. е. BP, покажет закономерно ожидаемый выигрыш или оценку рассматриваемого жребия.

Далее, чтобы узнать, как велика должна быть ставка, соответствующая ожиданию выигрыша, нужно продолжить кривую в противоположную сторону так, чтобы теперь абсцисса Bp каждый раз показывала *проигрыш*, а относящаяся к ней ордината po — соответствующий этому проигрышу *убыток*. Но так как в игре со справедливыми условиями убыток от проигрыша должен быть равен выгоде от выигрыша, следует принять, что $An = AN$, или $po = PO$; тогда Bp обозначает ставку, которую не должен превышать никто, если он должным образом учитывает свое имущественное положение.

§ 8. Дополнение I. Согласно гипотезе, обычно использовавшейся до сих пор учеными и основанной на утверждении, что каждый выигрыш должен оцениваться исключительно по себе самому, и что он всегда доставляет прямо пропорциональную себе *выгоду*, кривая BS должна быть прямой линией; поэтому если по-прежнему

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots},$$

то, подставляя с обеих сторон соответствующие пропорциональные величины, мы получим:

$$BP = \frac{m \cdot BC + n \cdot BD + p \cdot BE + q \cdot BF + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$

в полном соответствии с обычно применяемым правилом.

§ 9. Дополнение II. Если отрезок AB по отношению к наибольшему вообще возможному выигрышу BF оказывается бесконечно большим, то дугу BM можно рассматривать как бесконечно малый отрезок прямой линии, и в этом случае также действует то же самое обычное правило; таким образом, оно выполняется с хорошим приближением при всех играх, в которых речь идет о сравнительно малых суммах.

§ 10. После этого весьма общего рассмотрения обратимся теперь к упоминавшейся выше гипотезе, которая в действительности заслуживает рассмотрения в первую очередь. Здесь необходимо прежде всего при сохранении предпосылок, содержащихся в § 7, исследовать природу кривой sBS. Однако в связи с тем, что на основе нашей гипотезы мы должны рассматривать бесконечно малые выигрыши, нам следует считать выигрыши BC и BD почти равными, так что их разность CD будет бесконечно мала. Если затем провести Gr параллельно BR, то rH будет представлять бесконечно малую *выгоду*, которую некто, обладающий состоянием AC, получит благодаря бесконечно малому выигрышу CD. Однако эту *выгоду* нельзя оценивать просто по малому выигрышу CD (которому она, разумеется, при прочих равных условиях пропорциональна), но необходимо учитывать и имеющееся состояние AC, которому она обратно пропорциональна. Если мы положим $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$, кроме того $AB = a$, и обозначим буквой b некоторую константу, то получим:

$$dy = \frac{b\cdot dx}{x},$$

то есть[3]

$$y = b\cdot \log \frac{x}{\alpha}.$$

Следовательно, кривая sBS представляет собой логарифмическую кривую, подкасательная которой всегда равна b, а асимптотой является прямая Qq.[4]

§ 11. Если мы сравним этот результат со сказанным в § 7, то очевидно:

$$PO = b\cdot \log \frac{AP}{AB},$$

а также

$$CG = b\cdot \log \frac{AC}{AB}, \quad DH = b\cdot \log \frac{AD}{AB} \text{ и т. д.}$$

Так как

$$PO = \frac{m\cdot CG + n\cdot DH + p\cdot EL + q\cdot FM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots},$$

то отсюда следует:

$$b\cdot \log \frac{AB}{AP} = \left(mb\cdot \log \frac{AC}{AB} + nb\cdot \log \frac{AD}{AB} + pl\cdot \log \frac{AE}{AB} + \right.$$

$$\left. + qb\cdot \log \frac{AF}{AB} + \ldots\right) : (m + n + p + q + \ldots),$$

а отсюда

$$AP = (AC^m\cdot AD^n\cdot AE^p\cdot AF^q \cdot \ldots)^{\frac{1}{m+n+p+q\ldots}}.$$

[3] Величина y получила название морального выигрыша при изменении состояния от уровня α до уровня x. Функция $y = b \ln \frac{x}{\alpha}$ является решением дифференциального уравнения $dy = bdx/x$, отвечающим начальному условию $y = 0$ при $x = \alpha$.

[4] По современной терминологии — это длина подкасательной, если кривую рассматривать как график зависимости x от y.

Если отсюда еще вычесть AB, то остаток BP будет представлять оценку рассматриваемого жребия.[5]

§ 12. Таким образом, предыдущий параграф дал нам следующее правило: *Каждый отдельный возможный доход после того, как к нему будет прибавлено имеющееся состояние, нужно возвести в ту степень, которая показывается числом соответствующих случаев; после этого все эти степени нужно перемножить и из их произведения извлечь корень, степень которого равна сумме всех вообще возможных случаев; если затем из этого корня вычесть имеющееся состояние, то полученный остаток даст оценку рассматриваемого жребия.*

Это положение является основным для определения оценки ожидания выигрыша в различных случаях, и я мог бы на нем — точно так же, как перед этим было с обычно употребляемой гипотезой — построить целую теорию. И хотя подобное предприятие было бы желательно ввиду его полезности, а также и новизны, но уже начатые мною другие работы вынуждают меня от нее отказаться. Поэтому из того, что мне представляется сейчас в результате моих размышлений, я приведу здесь лишь самое главное.

§ 13. Из сказанного ранее прежде всего вытекает, что при любой игре, как бы справедливы ни были поставленные условия, каждый из двух партнеров с самого начала терпит некоторый ущерб, — конечно, это явное указание со стороны природы на необходимость избегать азартной игры. Это следует, однако, из вогнутости кривой[6] sBS относительно BR. Если сделать ставку

[5] Здесь введена числовая характеристика случайного выигрыша

$$\prod_j (g_j + \alpha)^{p_j} - \alpha,$$

где g_j — возможные значения выигрыша, а p_j — их вероятности. Эта характеристика получила у Лапласа название «морального ожидания».

Моральное ожидание всегда меньше математического ожидания; при $\alpha \to \infty$ моральное ожидание имеет своим пределом математическое ожидание.

[6] Для любой строго вогнутой функции $\varphi(x)$ справедливо неравенство $M[\varphi(x)] < \varphi(M[X])$, где X — невырожденная случайная величина (теорема Йенсена). Д. Бернулли справедливо связывает ущерб игроков именно с вогнутостью функции морального выигрыша. Одним из частных следствий приведенного неравенства является утверждение о том, что геометрическое среднее всегда меньше арифметического, что иллюстрируется приводимым далее Д. Бернулли числовым примером.

Bp равной ожидаемому выигрышу *BP*, то окажется, что *убыток po*, получающийся в случае проигрыша, всегда больше, чем ожидаемая *выгода PO*. Хотя для математика это должно быть достаточно ясно, для общего понимания мне хочется пояснить это на примере. Итак, имеются два игрока, каждый из которых обладает состоянием в 100 дукатов и половину из него ставит в игру, дающую одинаковые шансы обеим сторонам. Теперь каждый из игроков имеет оставшиеся у него 50 дукатов и, кроме того, надежду на выигрыш 100 дукатов. Однако эта сумма согласно правилу, рассмотренному в § 12, имеет стоимость всего $(50^1 \cdot 150^1)^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{50 \cdot 150}$, то есть менее 87 дукатов, так что несмотря на полное равенство шансов каждый игрок при игре терпит убыток более чем в 13 дукатов. Чтобы сделать для всех понятной очевидную истину, что игрок действует тем безрассуднее, чем значительнее та часть его состояния, которую он ставит в азартную игру, мы рассмотрим тот же пример с единственным отличием — пусть один игрок, перед тем как сделать ставку 50 дукатов, имел их 200. Тогда он терпит убыток $200 - \sqrt{150 \cdot 250}$, т. е. всего немногим более 6 дукатов.

§ 14. Если, следовательно, каждый, кто ставит сколь угодно малую часть своего состояния в азартную игру с равными шансами, поступает неразумно, интересно было бы исследовать здесь, насколько большое преимущество при ставке денег нужно иметь перед своим партнером, чтобы вступить в игру без ущерба. Опять возьмем как можно более простую игру: она состоит из двух одинаково возможных случаев — благоприятного и неблагоприятного. Пусть полученный в случае удачи выигрыш будет g, потерянная в случае неудачи ставка x и имеющееся состояние α. Тогда $AB = \alpha$, $BP = g$,

$$PO = b \cdot \log \frac{\alpha + g}{\alpha} \quad (\text{см. § 10}),$$

а так как (согласно § 7) $po = PO$, исходя из природы логарифмической кривой, получаем:

Этот же качественный результат — ущерб, обусловленный случайным характером исходов, — возникает в современных моделях многих экономических явлений, для которых характерна вогнутость зависимостей эффекта от затрат того или иного ресурса (убывание предельной полезности, предельной продуктивности и т. п.).

$$Bp = \frac{\alpha g}{\alpha + g}.$$

Но так как Bp представляет ставку x, мы получаем [7]:

$$x = \frac{\alpha g}{\alpha + g},$$

т. е. величину, которая всегда меньше ожидаемого выигрыша g. Отсюда следует также, что очень неразумно действует тот, кто ставит все свое состояние в игру, надеясь выиграть еще столько же, это легко поймет каждый, кто правильно усвоил наши предшествующие определения. И общепризнанный в обыденной жизни факт, что кто-то может благоразумно рисковать в каком-либо сомнительном деле, а кто-то нет, — находит в вышесказанном свое объяснение.

§ 15. Особого рассмотрения заслуживают здесь обычаи купцов при страховании товаров в море. Для пояснения может служить следующий пример. Купец Каюс из Петербурга закупил в Амстердаме товары, которые он мог продать за 10000 рублей, если бы они находились в Петербурге. Он отправляет их морским путем, но не уверен, следует ли их страховать. При этом он знает, что из сотни судов, отправляющихся в это время года из Амстердама в Петербург, обычно пять погибают. Тем не менее он не может найти никого, кто бы за цену менее 800 рублей принял бы на себя страховку, а ему эта цена кажется чрезмерно высокой. Спрашивается: как велико должно быть состояние Каюса, не считая вышеуказанных товаров, чтобы его отказ от страховки можно было бы считать разумным? Обозначим это его состояние x; тогда оно вместе с надеждой на счастливое прибытие товаров выразится следующим образом:

$$\sqrt[100]{(x + 10000)^{95} \cdot x^5} = \sqrt[20]{(x + 10000)^{19} \cdot x},$$

если он откажется от страховки; если же он, наоборот, согласится на нее, то он имеет надежное общее состояние $(x + 9200)$. Если мы обе эти величины приравняем друг к другу, то получим:

---

7 Условие $po = PO$ сводится к уравнению $\left| b \ln \frac{\alpha - x}{\alpha} \right| = b \ln \frac{\alpha + g}{\alpha}$ или $\frac{\alpha}{\alpha - x} = \frac{\alpha + g}{\alpha}$, откуда и следует результат.

$$(x + 10000)^{19} \cdot x = (x + 9200)^{20}$$

и отсюда, приблизительно: $x = 5043$. Таким образом, если Каюс, кроме надежды на свои товары, обладает еще суммой *более* 5043 рублей, то, отказавшись от страховки, он поступает разумно; если же он имеет *меньше*, то ему следовало бы на нее согласиться. Теперь спросим: каким, самое меньшее, состоянием должен обладать тот, кто берет на себя страховку за 800 рублей, чтобы его поступок можно было считать разумным? Для вычисления этого состояния y мы имеем уравнение:

$$\sqrt[20]{(y + 800)^{19} \cdot (y - 9200)} = y$$

и отсюда, приблизительно: $y = 14243$ — число, которое без новых вычислений можно было бы вывести из найденного выше. Тот, кто имеет меньше, действует неразумно, если берет на себя страхование, тогда как кто-нибудь, обладающий бóльшим состоянием, поступит, сделав это, совершенно правильно. Отсюда видно, насколько выгодным оказалось введение таких страховок, так как оно может приносить большую пользу обеим сторонам. Если бы Каюсу удалось договориться о страховке за 600 рублей, с его стороны было бы неразумно от нее отказываться, поскольку он обладает менее чем 20478 рублями, и наоборот, он действовал бы излишне осторожно, если бы так застраховал свои товары, имея состояние свыше 20478 рублей. С другой стороны, кто-нибудь, кто имеет менее 29878 рублей, поступил бы неразумно, если бы предложил Каюсу страховку за 600 рублей, и наоборот, для него это было бы выгодно, если бы он имел больше. Однако никто, даже если бы он был вдвое богаче, не сделал бы выгодного дела, взяв на себя такую страховку за 500 рублей.

§ 16. Далее из нашей теории следует еще одно правило, которое также не бесполезно для некоторых, а именно: те товары, которые подвергаются опасности, целесообразнее делить на несколько частей, чем рисковать всеми ими сразу. Мне хочется опять пояснить это более подробно. Семпрониус имеет всего наличными 4000 дукатов и, кроме того, в дальних странах — товаров стоимостью 8000 дукатов, перевезти которые можно только морем. Однако, по опыту известно, что из каждых десяти судов одно погибает. При этих условиях я утверждаю, что ожидание, связанное с этими товарами, имеет для Семпрониуса оценку в 6751 дукат (а именно: $\sqrt[10]{12000^9 \cdot 4000} - 4000$), если он доверит все 8000 дукатов *одному* единственному судну. Но если он погрузит товары равными частями на два судна, его ожидание будет иметь оценку ($\sqrt[100]{12000^{81}\cdot 8000^{13}\cdot 4000} - 4000$), т. е. 7033 дуката. И, следовательно, ожидание Семпрониуса будет тем более благоприятным, чем меньше будут отдельные части, которые он доверит каждому судну. И тем не менее это ожидание не превысит стоимость в 7200 дукатов. Это замечание могло бы быть полезным для тех, кто вкладывает свое состояние в ценные бумаги или подвергает его иным превратностям случая.

§ 17. Очень многое из того, что я, к сожалению, вынужден пропустить, могло бы тоже оказаться новым и уж ни в коем случае не бесполезным. И, разумеется, если каждый человек, одаренный хотя бы некоторой долей здравого смысла, бóльшую часть этого теперь уже видит самостоятельно и действует в соответствии с этим, то прежде никто не мог поверить, что эти вещи можно определить так четко, как это сделано в приведенных примерах. И именно потому, что все эти положения так хорошо согласуются с результатами естественного опыта, было бы неправильно пренебречь ими, как недоказанными истинами, основанными только на сомнительных гипотезах. Это может быть также подтверждено следующим примером, который послужил толчком для данных соображений и который имеет следующую историю. Мой глубокоуважаемый двоюродный брат, знаменитый *Николай Бернулли*, профессор обоих прав в Базельской академии [8], однажды предложил известному *Монмору* [9] пять задач, которые помещены в книге г-на де Монмора «*Analyse sur les jeux de hazard*», стр. 402. Последней из этих задач является следующая: *Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это происходит после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго —*

---

[8] Николай Бернулли (1687—1759) — профессор математики в Падуе, профессор логики и права в Базеле; племянник Якоба и Иоганна Бернулли. Основные труды по теории вероятностей, теории рядов, дифференциальным уравнениям и демографии. В известном переводе А. Прингсгейма ошибочно назван дядей, что привело к ошибкам в ряде последующих работ о семье Бернулли. Николай Бернулли (1662—1716), дядя Даниила и отец Николая, названного выше, был живописцем и членом Суда Базеля, научных должностей никогда не занимал. Кроме того, авторство приводимой ниже задачи в некоторых публикациях ошибочно приписывается Николаю Бернулли (1695—1726) — петербургскому академику, родному брату Даниила.

[9] П. Р. де Монмор (Montmort) (1678—1719) — французский математик. Основные работы по теории вероятностей. Состоял в переписке с Иоганном и Николаем Бернулли.

2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла? — Эту задачу мой вышеназванный двоюродный брат упомянул в одном из адресованных мне писем и выразил желание услышать мое мнение на этот счет. Ведь хотя вычисления показывают, что ожидания Павла бесконечно велики, но, как замечает мой двоюродный брат, не найдется ни одного сколько-нибудь разумного человека, который охотно не продал бы это ожидание за 20 дукатов. Действительно, если мы здесь будем действовать по обычным правилам, мы найдем для жребия Павла бесконечно большую оценку, но несмотря на это, никто не захочет ее получить даже за весьма небольшую цену.[10]

Однако, если мы произведем вычисления по нашим новым правилам, то найдем верный способ развязать этот узел. Решение этой задачи выполняется на основе наших принципов следующим образом.

§ 18. Число подлежащих рассмотрению случаев бесконечно велико. В половине из них игра заканчивается с первым броском; в четвертой части игра заканчивается со вторым броском, в восьмой — с третьим, в шестнадцатой — с четвертым и т. д. Если затем количество всех возможных случаев, несмотря на то, что оно бесконечно велико, мы временно обозначим N, то, очевидно, будет $\frac{1}{2}N$ случаев, когда Павел получит 1 дукат, $\frac{1}{4}N$ — когда он получит 2 дуката, $\frac{1}{8}\ N$ — 4, $\frac{1}{16}N$ — 8 и т. д., до бесконечности. Если все состояние Павла равно a, то это ожидание выигрыша имеет следующую оценку:

$$\sqrt[N]{(a+1)^{\frac{N}{2}}\cdot(a+2)^{\frac{N}{4}}\cdot(a+4)^{\frac{N}{8}}\cdot(a+8)^{\frac{N}{16}}\ldots}\ -a$$

или:

$$\sqrt[2]{a+1}\cdot\sqrt[4]{a+2}\cdot\sqrt[8]{a+4}\cdot\sqrt[16]{a+8}\cdot\ldots-a.$$

---

[10] Этой задаче, получившей название «петербургской задачи», или «петербургского парадокса», посвящена обширная литература. (см.,напр.: *Г. Секей.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике /Пер. с англ. — М., 1990. С. 35—38).

§ 19. Из этой формулы для ожидания выигрыша Павла следует, что его оценка возрастает с увеличением состояния, но оно никогда не станет бесконечно большим, если одновременно не является бесконечно большим имеющееся состояние.[11] В качестве особых выводов получаем еще следующее: если Павел не имеет ничего, то оценка его жребия равна $\sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{18} \ldots$, то есть равна 2 дукатам. Если он имеет 10 дукатов, то оценка его жребия составляет приблизительно 3 дуката; далее — примерно $4\frac{1}{3}$ дуката при состоянии 100 дукатов и, наконец, 6 — при состоянии 1000 дукатов. Отсюда нетрудно заключить, какими огромными богатствами нужно обладать, чтобы купить ожидание выигрыша Павла с выгодой за 20 дукатов. Конечно, эта покупная цена несколько отличается от ожидания выигрыша, которым обладал бы покупатель при определенном состоянии α, однако рассматриваемое различие весьма незначительное, если α является большим числом. Если мы обозначим точную покупную цену x, то эта величина будет определяться уравнением:

$$\sqrt[2]{\alpha + 1 - x} \cdot \sqrt[4]{\alpha + 2 - x} \cdot \sqrt[8]{\alpha + 4 - x} \cdot$$
$$\cdot \sqrt[16]{\alpha + 8 - x} \ldots = \alpha,$$

и если α является большим числом, этому уравнению действительно приблизительно удовлетворяет значение

$$x = \sqrt[2]{\alpha + 1} \cdot \sqrt[4]{\alpha + 2} \cdot \sqrt[8]{\alpha + 4} \cdot \sqrt[16]{\alpha + 8} \ldots - \alpha.$$

После того, как я опубликовал эти свои рассуждения, я послал экземпляр своей статьи вышеупомянутому г-ну Николаю Бернулли, чтобы узнать его мнение о моем решении предложенной им задачи. В письме, которое он написал мне в 1732 г., он сообщил, что ему очень нравятся мои рассуждения об определении оценки жребия, когда речь идет о том, что каждый должен оценивать свой собственный шанс. Иначе, однако, обстоит дело, когда третье лицо в качестве судьи должно указывать каждому партнеру его ожидания выигрыша по закону и спра-

[11] То есть бесконечное произведение, фигурирующее в последней формуле, сходится при любом конечном α. Моральное ожидание выигрыша, выражаемое этой формулой, неограниченно возрастает при $\alpha \to \infty$.

ведливости, чтó я и сам подобным образом рассматриваю в § 2. Далее он сообщил мне мнение, высказанное за несколько лет до выхода моей статьи знаменитым математиком Крамером,[12] *которое я нахожу настолько сходным с моим, что это согласие по такому вопросу кажется мне в высшей степени примечательным. Поэтому было бы вполне уместно привести здесь слова, которыми Крамер в письме, написанном моему двоюродному брату в 1728 г., сообщает свое мнение. Вот они:* «Не знаю, не заблуждаюсь ли я, но мне кажется, что у меня есть решение того необыкновенного случая, который Вы предложили в своем письме от 9 сентября 1713 г. (задача 5, стр. 402) господину де Монмору. Чтобы упростить этот случай, я предполагаю, что *A* бросает монету вверх, *B* обязуется давать ему 1 экю, если при первом броске монета упадет вверх крестом, 2 экю — если это произойдет только при втором броске, 4 — если при третьем, 8 — если при четвертом и т. д. Тогда парадокс состоит в том, что вычисление эквивалента, который *A* должен уплатить *B*, дает бесконечно большую сумму, что кажется нелепым, так как ни один сколько-нибудь здравомыслящий человек не дал бы за это и 20 экю. Откуда берется эта разница между математическим вычислением и общепринятой оценкой? Мне кажется, она объясняется тем, что (*в теории*) математики оценивают деньги только по их количеству, (*на практике*) разумные люди, наоборот, оценивают их по той пользе, которую из них можно извлечь. То, что делает математическое ожидание бесконечно большим, — это огромная сумма, которую я могу выиграть, если сторона с крестом выпадет лишь очень нескоро, — например, при сотом или тысячном броске. Однако эта сумма, если я сужу об этом здраво, значит для меня *не больше*, она *не доставляет* мне большего удовлетворения, *не побуждает* меня к игре сильнее, чем если бы она принесла мне 10 или 20 миллионов экю. Итак, предположим, что все суммы свыше 10 миллионов или, ради большего удобства, — свыше $2^{24} = 16777216$ экю — равноценны между собой, или лучше сказать, я никогда не могу получить более 2^{24} экю, как бы поздно ни выпал крест; тогда мое ожидание имеет следующую стоимость:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\ldots+\frac{1}{2^{24}}\cdot 2^{23}+\frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{24}+\frac{1}{2^{26}}\cdot 2^{24}+$$

---

[12] Габриель Крамер (Cramer) (1704—1752) — швейцарский математик, профессор математики и философии в Базеле. Основные работы по теории систем линейных уравнений.

$$+ \frac{1}{2^{27}} \cdot 2^{24} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots =$$

$$= 12 + 1 = 13.$$

Таким образом, моральная оценка моего ожидания сводится к 13 экю, и подлежащий уплате ее эквивалент — к такой же величине, что представляется значительно более разумным, чем увеличение его до бесконечности».

До этого места изложение искомого решения слишком неопределенно и небезупречно. Ведь если правда, что сумма в 2^{25} не кажется нам больше, чем 2^{24}, то не следует вообще обращать внимание на сумму, которую я могу выиграть только после 24-го броска, так как, возможно, я уже перед 25-м броском имею $2^{24} - 1$, что по этой теории оказывается равнозначным с 2^{24}. Поэтому можно с одинаковым правом сказать, что мое ожидание стóит не 13 экю, а всего 12. Впрочем, я говорю об этом совсем не затем, чтобы оспорить принцип вышеуказанного автора, ведь и мой принцип состоит в том, что разумные люди должны оценивать деньги по той пользе, которую они могут из них извлечь; скорее, я говорю об этом только для того, чтобы никто не воспользовался случаем дать отрицательную оценку самой этой теории. Как раз то же самое говорит и знаменитый Крамер нижеследующими словами, которые совсем в нашем духе. Он продолжает так: «Можно было бы найти для него (эквивалента) еще меньшее значение, если взять за основу какую-нибудь другую гипотезу о моральном значении богатств. Потому что применяемая здесь гипотеза ни в коей мере не является безусловно правильной, так как в действительности, должно быть, 100 миллионов кому-то доставляют больше удовольствия, чем 10 миллионов, хотя и не в 10 раз. Если, например, принять, что моральное значение благ пропорционально квадратному корню из их математической величины, т. е., что удовольствие, которое мне доставляют 40 миллионов, вдвое больше того, которое мне дают 10 миллионов, то мое моральное ожидание имело бы следующую оценку:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \ldots = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}.$$

Но эта величина еще не является искомым эквивалентом, потому что она сама по себе не равна стоимости ожидания, а имеет такую величину, что страдание от ее утраты равно моральному ожиданию того наслаждения, которое мне дал бы ее выигрыш. Следовательно (согласно нашему допущению), этот эквивалент должен составлять:

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} = 2.9\ldots,$$

т. е. менее 3, что довольно мало и, тем не менее, как мне кажется, ближе к общепринятой оценке, чем 13».