Суммарные, средние и предельные величины

Допустим, что некоторая фирма может производить большее или меньшее количество изделий в единицу времени. Соответственно этому, различными будут и издержки фирмы в единицу времени. В качестве примера мы можем рассмотреть данные, представленные в двух первых столбцах таблицы.

Общие издержки фирмы связаны с изготовлением всех изделий. А какова величина издержек, приходящихся на одно изделие?

Однозначный ответ на этот вопрос можно дать только тогда, когда издержки строго пропорциональны количеству изделий. Но это совершенно исключительный частный случай. Во всех остальных случаях необходимы уточнения.

Во-первых, можно говорить о **средних** издержках на одно изделие, как бы распределив издержки между всеми изделиями поровну. Чтобы найти величину средних издержек, достаточно разделить общую сумму издержек на число изделий. Так построен третий столбец таблицы.

Но средние издержки ничего не говорят о том, как изменятся издержки при изменении количества производимых изделий. Величина изменения издержек при изменении числа изделий на единицу называется **предельными** издержками на одно изделие. Предельные издержки приведены в 4-м столбце таблицы: здесь каждое число получено вычитанием из соответствующей величины общих издержек предыдущего значения этой же величины.

Иногда предельные издержки определяют как "издержки, связанные с изготовлением последнего изделия".

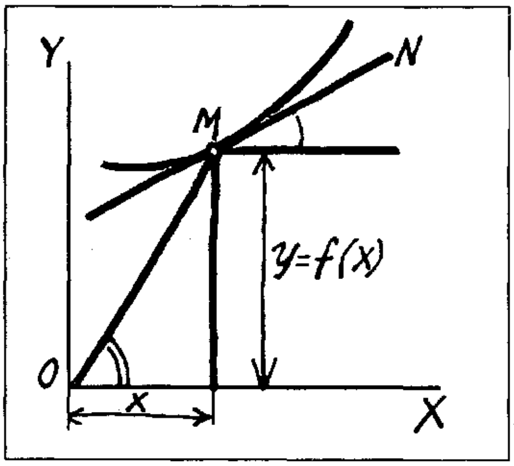
Таблица
Суммарные, средние и предельные издержки

Число изделий в месяц (шт.)	Общие издержки в месяц (тыс. руб.)	Издержки на одно изделие	
		средние	предельные
0	0	...	...
1	30	30	30
2	38	19	8
3	48	16	10
4	60	15	12
5	80	16	20

Такое определение не следует понимать слишком буквально. Если, например, изготовление 4 изделий в месяц связано с издержками в 60 тыс.руб., а 5 изделий – 80 тыс.руб., то это не значит, что дополнительные издержки в 20 тыс.руб. связаны с каким-то конкретным (5-м) экземпляром изделия. Все эти изделия могут изготавливаться одновременно. "Издержки на 5-е изделие" означают, что при переходе от выпуска 4-х к выпуску 5-ти изделий в месяц затраты возрастут на 20 тыс.руб. в месяц.

Вопросы, подобные рассмотренным на примере таблицы, возникают и при анализе затрат какого-либо конкретного ресурса (труда, металла, электроэнергии т.п.) в зависимости от объема производства, и при анализе выручки от продажи того или иного количества товара, и во многих других экономических задачах. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем говорить о суммарных, средних и относительных величинах безотносительно к их конкретному экономическому содержанию.

Рис. 1.
Угол наклона к оси абцисс кривой в точке M – это угол наклона касательной MN; он характеризует предельную величину $f'(x)$. Угол наклона радиуса-вектора OM характеризует среднюю величину $\bar{f}(x)$.



Пусть функция $y = f(x)$ описывает зависимость суммарной величины y (издержек, дохода, прибыли и т.п.) от величины x, характеризующей объем производства, продаж, потребления и т.д. В большинстве случаев (в отличие от рассмотренного выше примера) величина x не является целочисленной: либо она бесконечно делима и измеряется в тоннах, литрах, киловатт-часах и тому подобных единицах; либо измеряется в штуках, но настолько велика, что изменение на одну штуку совершенно неощутимо (например, часы или радиоприемники). Поэтому мы будем считать ее величиной непрерывной и ограничим лишь условием $x > 0$.

Среднюю величину определим как частное

$$\bar{f}(x) = f(x)/x \qquad (1)$$

Изменение аргумента на величину Δx, то есть переход от объема x к объему $x + \Delta x$, вызывает изменение суммарной величины от $f(x)$ до $f(x + \Delta x)$, то есть ее прирост равен
$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Отношение $\Delta f/\Delta x$ характеризует изменение суммарной величины на единицу приращения величины x. Но так как мы считаем величину x непрерывно изменяющейся, никакой "минимальной порции" приращения не существует, и предельная величина определяется как предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x), \qquad (2)$$

то есть представляет собой производную от суммарных затрат по аргументу x (с чем и связаны термины "предельные издержки", "предельный доход" и аналогичные).

Рис. 1. иллюстрирует геометрические свойства введенных величин. Возьмем на графике функции суммарной величины произвольную точку M. Ее координаты x и $y = f(x)$. Проведем отрезок из начала координат в точку M (он называется радиусом-вектором точки M). На рисунке видно, что угловой коэффициент радиуса-вектора представляет среднюю величину $\bar{f}(x)$. Предельной величине соответствует угловой коэффициент касательной к графику в точке M.

Из таблицы видно, что с изменением объема x и средняя, и предельная величины изменяются, причем характер изменения этих величин различен. В дальнейшем среднюю величину $\bar{f}(x)$ и предельную— величину $f'(x)$ будем рассматривать как функции объема x.

Непосредственно из определений (1) и (2) можно вывести основные свойства этих функций:

если $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
то $\bar{g}(x) = \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x)$
и $g'(x) = f'_1(x) + f'_2(x)$.

если $g(x) = af(x)$,
то $\bar{g}(x) = a\bar{f}(x)$
и $g'(x) = af'(x)$.

Если $f(x) = ax$, то $\bar{f}(x) = a$ и $f'(x) = a$, то есть в случае, когда суммарная величина пропорциональна аргументу, средняя величина совпадает с предельной при всех значениях x. Графиком такой зависимости служит прямая, проходящая через начало координат. Радиус–вектор любой точки на этой прямой целиком лежит на ней; касательная к прямой — сама эта прямая, так что в рассматриваемом случае оба угловых коэффициента совпадают.

Рассмотрим теперь график суммарной величины, представленный на рис. 2а. Такой вид кривой характемен для зависимости издержек от объема производства. Представляемая этим рисунком функция $y = f(x)$ выпукла, с ростом x наклон графика возрастает, так что $f'(x)$ — возрастающая функция. Характер изменения средней величины иной. При возрастании x наклон радиуса-вектора уменьшается от бесконечности до минимального значения, достигаемого в точке L, а затем вновь начинает возрастать.

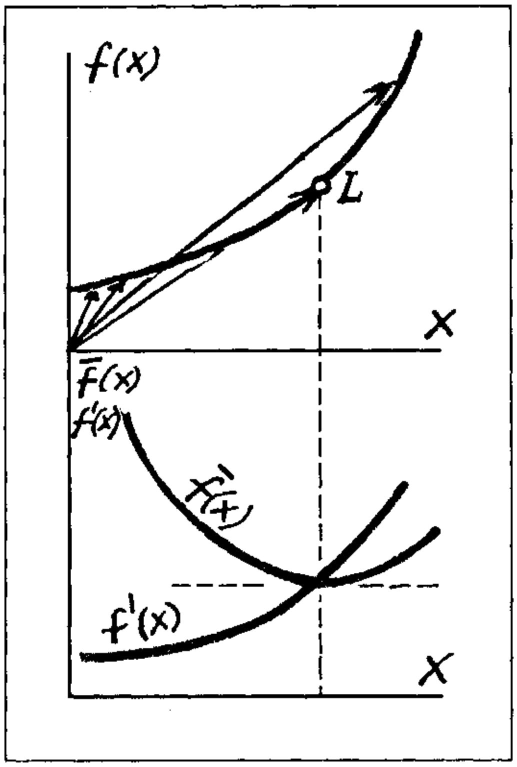
Рассмотрим условия возрастания и убывания средней величины в общем случае. Равенство (1) позволяет представить суммарную величину в виде

$$f(x) = x \cdot \bar{f}(x).$$

Дифференцируя это выражение, получаем:

$$f'(x) = \bar{f}(x) + x \cdot \frac{d\bar{f}(x)}{dx},$$

Рис. 2.
а) кривая суммарной величины
б) кривая средней и предельной величин



откуда

$$\frac{d\bar f(x)}{dx}=\frac{f'(x)-\bar f(x)}{x}. \qquad (3)$$

Так как $x>0$, знак производной $\frac{d\bar f(x)}{dx}$ совпадает со знаком разности $f'(x)-\bar f(x)$. Поэтому справедлива следующая теорема об изменении средней величины:

если при данном значении x выполняется неравенство

$$f'(x)>\bar f(x),$$

то x — точка возрастания средней величины $\bar f(x)$;

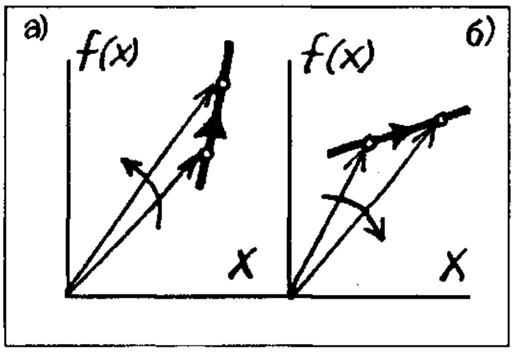
если при данном значении x выполняется неравенство

$$f'(x)<\bar f(x),$$

то x — точка убывания средней величины $\bar f(x)$.

Из соотношения (3) следует также условие экстремума — максимума или минимума — средней величины. Если производная некоторой функции непрерывна, то сама эта функция достигает экстремальных значений в тех точках, где производная обращается в

Рис. 3.
Геометрическое представление условий:
а) возрастания средней величины
б) убывания средней величины



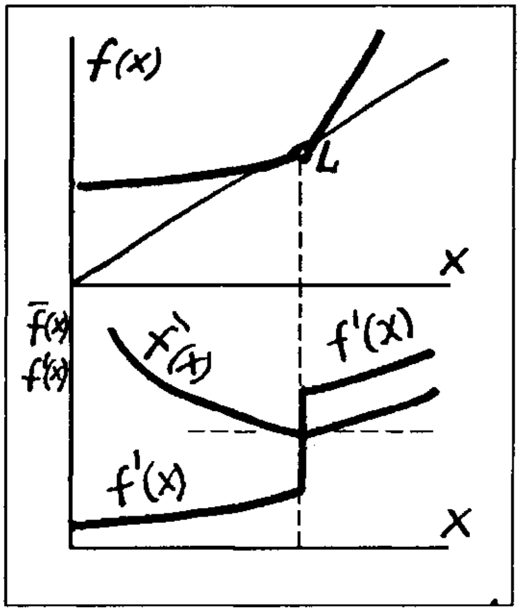


Рис. 4.
Кривая суммарной величины имеет излом в точке L.Кривая средней величины имеет в этой точке излом, а кривая предельной величины – разрыв (скачок)

нуль. Таким образом, при непрерывном изменении предельной величины справедливо следующее условие локального экстремума средней величины: локальные максимумы и минимумы средних величин расположены в тех точках, в которых выполняется равенство

$$f'(x)=\bar f(x). \qquad (4)$$

На рис. 2 есть такая точка — L. Здесь радиус-вектор касается графика функции, или, что то же самое, касательная проходит через начало координат.

Но предельная величина не во всех случаях изменяется непрерывно. В некоторых точках она может изменяться скачком. Кривая суммарной величины в таких точках имеет излом. Средняя величина в этих точках будет принимать экстремальные значения, если при этом будет меняться знак разности $f'(x)-\bar f(x)$.

Мы подробно остановились на описании участков возрастания и убывания средней величины, точек ее максимума и минимума, потому что эти участки и эти точки играют существенную роль в описании поведения субъекта на рынке. В заключение рассмотрим случай, когда объем x — целочисленная величина, поскольку и такие случаи могут представлять практический интерес (примерами могут служить производство крупных генераторов, судов и т.д.).

В этом случае удобнее заменить обозначение x на n. Средняя величина по-прежнему определяется равенством

$$\bar{f}(n) = f(n)/n.$$

Для предельной величины будем использовать обозначение $f^*(n)$ (штрих служит символом производной и потому был бы здесь неуместен):

$$f^*(n) = f(n) - f(n-1).$$

Найдем выражение для изменения средней величины при увеличении аргумента на единицу:

$$\bar{f}(n) - \bar{f}(n-1) = \frac{f(n)}{n} - \frac{f(n-1)}{n-1} = \frac{(n-1)f(n) - n f(n-1)}{n(n-1)} = \frac{n f^*(n) - f(n)}{n(n-1)}.$$

После деления числителя и знаменателя на n получаем выражение, аналогичное равенству (3):

$$\bar{f}(n) - \bar{f}(n-1) = \frac{f^*(n) - \bar{f}(n)}{n-1}. \quad (5)$$

Значение n соответствует минимуму средней величины (локальному), если

$$\bar{f}(n) \le \bar{f}(n-1) \text{ и } \bar{f}(n) \le \bar{f}(n+1).$$

Условие минимума, в отличие от (4), будет представлять собой систему двух неравенств, одно из которых следует из (5) непосредственно, а другое — после замены n на $n+1$:

$$\begin{cases} f^*(n) \le \bar{f}(n); \\ f^*(n+1) \ge \bar{f}(n+1). \end{cases} \quad (6)$$

Проверьте выполнение этого условия на данных таблицы.

Условие максимума средней величины получается изменением знаков неравенств в системе (6) на противоположные.

Упражнения.

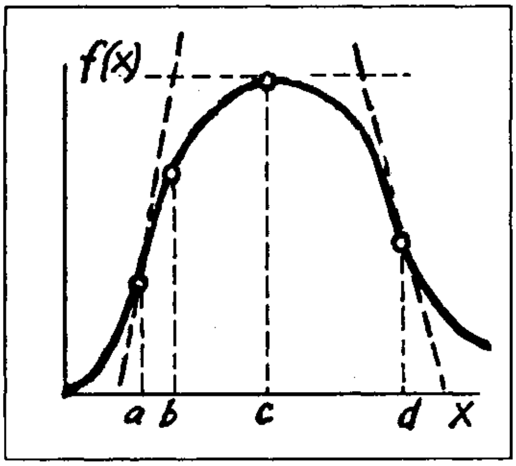
1. Суммарная величина описывается функцией

$f(x) = a + bx + cx^2$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Найдите явные выражения для $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$, участки возрастания и убывания средней величины и положение ее минимума; представьте результаты графически.

2. Функция $f(x)$ задана графически (рис.5). Постройте качественно графики функций $\bar{f}(x)$ и $f'(x)$. Чем интересны точки a, b, c, d?

Рис. 5.
К упражнению 2



3. Суммарная величина описывается степенной функцией $f(x) = a x^b$. Докажите, что при всех x средние затраты пропорциональны предельным.

Советуем Вам после прочтения статьи "Эластичность функции" выполнить следующие упражнения, в которых $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой положительной функцией при $x > 0$.

4. Докажите тождества:

$E_x(f) = f'(x)/\bar{f}(x)$;

$E_x(\bar{f}) = E_x(f) - 1$.

5. Докажите, что $\bar{f}(x)$ возрастает при $E_x(f) > 1$, убывает при $E_x(f) < 1$ и принимает экстремальное значение при $E_x(f) = 1$.

Эластичность функции

Пусть величина y зависит от величины x, и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Главный вопрос анализа зависимостей — это выяснение того, как изменится зависимая переменная y вследствие изменения аргумента x. Основное понятие дифференциального исчисления — производная — определяется как предел отношения **абсолютных** приращений переменных

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Но очень часто **относительные** изменения интересуют экономиста гораздо больше, чем абсолютные. Если, например, маленький арбуз подорожал на 15 коп., то при этом большой арбуз подорожал, скажем, на 50 коп. или даже на рубль. В то же время, если арбузы подорожали в 1.5 раза, то в 1.5 раза дороже стал и маленький, и большой арбуз, и килограмм, и вагон арбузов.

Анализ относительных изменений позволяет судить о многих экономических явлениях с большей степенью общности, чем анализ абсолютных изменений. Поэтому наряду с производными при анализе различных зависимостей в экономике широко пользуются особыми показателями — эластичностями. Введем обозначения для относительных приращений:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x};$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

Эластичностью переменной y по переменной x называется предел

$$E_x(f) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}. \qquad (2)$$

Разумеется, относительные отклонения имеют смысл лишь для величин, которые могут принимать только положительные значения. Это относится и к эластичностям. Поэтому дальше мы всюду будем полагать $x > 0$, $y > 0$. При этом случаи $x = 0$ или $y = 0$ могут рассматриваться только как предельные.

Так как условие предельного перехода $\delta x \to 0$ равносильно условию $\Delta x \to 0$, равенство (2) может быть раскрыто следующим образом:

$$E_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \frac{x}{y},$$

а с учетом определения производной (1) получаем:

$$E_x(f) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \quad (3)$$

Поскольку x и y положительны, знак эластичности всегда совпадает со знаком производной: $E_x(y) > 0$ – для возрастающих функций, $E_x(y) < 0$ – для убывающих. При разных значениях аргумента эластичность может принимать различные значения: $E_x(y) > 0$ – на участках возрастания, $E_x(y) < 0$ – на участках убывания функции.

Чтобы сделать понятие эластичности более доходчивым, некоторые авторы определяют его так: эластичность показывает, на сколько процентов увеличится значение функции, если аргумент увеличится на 1%. Это определение не совсем точно: относительное приращение 0.01 в обычных случаях можно считать малой величиной, но все-таки не бесконечно малой, как это предполагается определением (2). Так, для функции $y = Ax^2$ эластичность, как показывает равенство (3), равна 2, а увеличение x на 1% влечет за собой увеличение y на 2.01% (проверьте!).

Из равенства (3) следуют основные свойства эластичности:

а) эластичность — безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены аргумент и функция. Если $u = Ax$, $v = By$, то

$$E_u(v) = \frac{dv}{du} \cdot \frac{u}{v} = \frac{B}{A} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{A\,x}{B\,y} = E_x(y);$$

б) эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:

$$E_y(x) = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{E_x(y)}.$$

Это следует непосредственно из определения (2);

в) эластичность переменной y по переменной x равна производной логарифма y по логарифму x. Так как

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d\ln y}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

справедливо равенство

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y / dx}{d\ln x / dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = E_x(y),$$

или

$$E_x(y) = \frac{d\log y}{d\log x}. \quad (4)$$

В последнем выражении использованы логарифмы по произвольному основанию: переход от одного основания логарифмов к другому равносилен умножению на константу и числителя, и знаменателя дроби (4), а это не изменит ее значения.

Равенство (4) показывает, что изучение различных свойств эластичности легко свести к изучению соответствующих свойств производных: достаточно перейти от величин x и y к их логарифмам.

Допустим, нас интересует эластичность произведения uv двух переменных, зависящих от одного и того же аргумента x:

$$E_x(uv) = \frac{d\ln uv}{d\ln x} = \frac{d\ln u}{d\ln x} + \frac{d\ln v}{d\ln x} =$$

$$= E_x(u) + E_x(v).$$

Так как $E_x(x) = 1$, из последнего равенства получаем выражение важного частного случая:

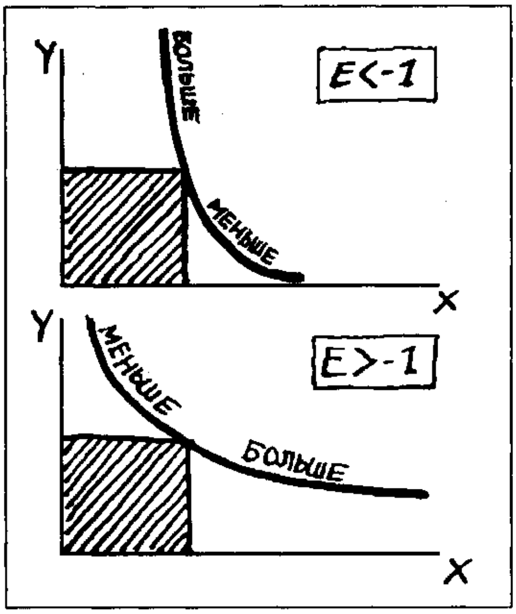


Рис. 1
Изменение произведения xy при различных значениях эластичности

$$E_x(xy) = E_x(y) + 1. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что произведение xy убывает с ростом x,
если $E_x(xy) < -1$, и возрастает,
если $E_x(y) > -1$ (рис.1).

Как можно оценить эластичность функции $y = f(x)$ по ее графику? Рассмотрим вначале возрастающую функцию (эластичность при этом положительна). Выберем на графике точку M и проведем через эту точку касательную; обозначим A и B — точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат, а C и D — проекции точки M на координатные оси. Допустим, что касательная пересекает ось ординат в отрицательной области, как это показано на рис.2а.

Из свойств производной следует, что $\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{dy}{dx}$.

Но $|MC| = y$, $|MD| = |OC| = x$, а из подобия треугольников BMD и MAC следует:

$$\frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MD|}{|AC|} = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

или

$$E_x(y) = \frac{|MB|}{|MA|}. \qquad (6)$$

Все приведенные выкладки и результат (6) полностью применимы и к положению касательной на рис.2б.

Разница состоит лишь в том, что в первом случае $|MB| > |MA|$, так что он относится к значениям $E_x(y) > 1$; во втором случае $|MB| < |MA|$, так что здесь $0 < E_x(y) < 1$. При $E_x(y) = 1$ касательная проходит через начало координат.

Рис. 2а, б, в.
Геометрические характеристики эластичности: варианты положения касательной к графику функции

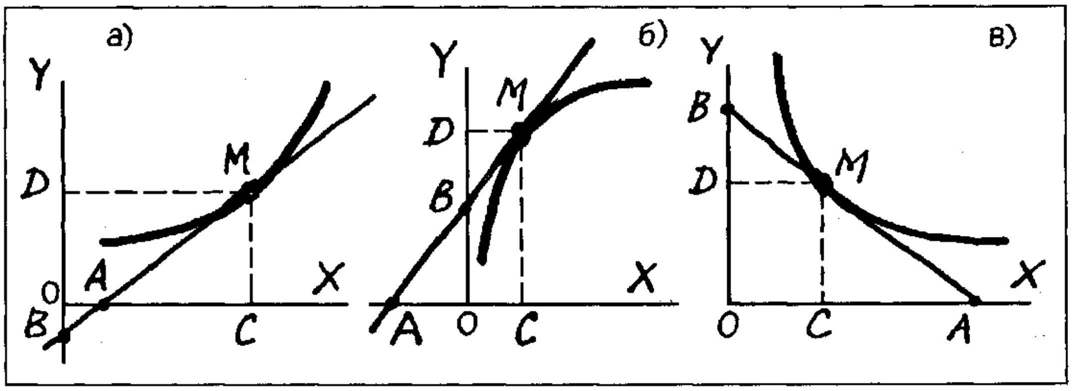


График для функции с отрицательной эластичностью представлен на рис. 2в. Все обозначения оставлены прежними. Рассуждая по аналогии, читатель без труда установит, что в этом случае

$$E_x(y) = -\frac{|MB|}{|MA|}. \qquad (7)$$

Мы могли бы применить равенство (6) и к этому случаю, если бы условились считать отношение отрезков положительным,если они направлены в одну сторону (от точки M), и отрицательным — если в противоположные.

Рассмотрим теперь эластичность двух видов функций, широко используемых в различных экономических моделях.

Рассмотрим степенную функцию (рис.3) вида

$$y = Ax^B \qquad (8)$$

Ее производная равна $\frac{dy}{dx} = ABx^{B-1}$, а эластичность

$$E_x(y) = ABx^{B-1} \cdot \frac{x}{Ax^B} = B \qquad (9)$$

при любых значениях x. Иными словами, эластичность степенной функции постоянна и совпадает с показателем степени.

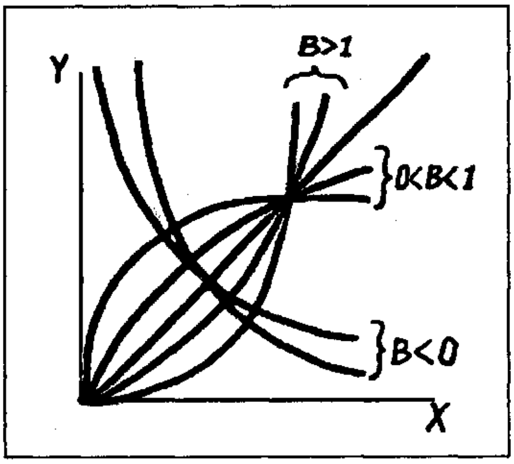


Рис. 3.
Степенные функции

Линейная функция (рис. 4)

$$y = a + bx \qquad (10)$$

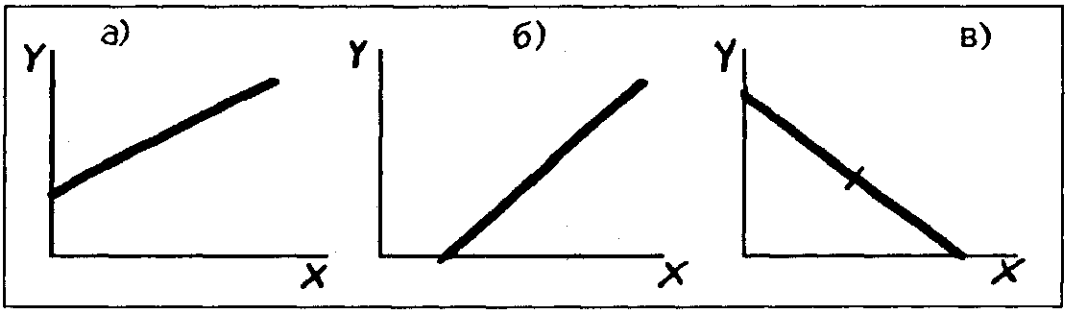
имеет постоянную производную, но ее эластичность при $a \neq 0$ изменяется с изменением x.

Понятие эластичности распространяется и на функции нескольких переменных:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Под частной эластичностью функции по одному из аргументов x_k понимается эластичность переменной y, рассматриваемой в зависимости только от x_k, при постоянных значениях остальных аргументов. Она связана с частной производной по этому аргументу

Рис. 4.
Варианты линейной функции



соотношением

$$E_{x_k}(y) = \frac{\delta y}{\delta x_k} \cdot \frac{x_k}{y}.$$

Следующие утверждения могут быть доказаны читателем как самостоятельные упражнения.

1. Для линейной функции (10):

а) если $a > 0, b > 0$, то с изменением x от 0 до $+\infty$ эластичность возрастает от 0 до +1 (рис. 4а);

б) если $a < 0, b > 0$, то с изменением x от $-a/b$ до $+\infty$ эластичность убывает от $+\infty$ до +1 (рис. 4б);

в) если $a > 0, b < 0$, то с изменением x от 0 до $-a/b$ эластичность убывает от 0 до $-\infty$; в середине этого отрезка $E_x(y) = -1$ (рис. 4в);

2. Эластичность показательной функции $y = AB^x$ изменяется пропорционально x.

3. Все функции одной переменной с постоянной эластичностью имеют вид (8) (воспользоваться равенством (4)).

4. Функции нескольких переменных с постоянными частными эластичностями – это степенные функции вида

$$y = Ax_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}, \ldots, x_N^{\beta_N}.$$

Выпуклые множества и функции

При исследовании экономических явлений математическими методами весьма значительным оказывается такое свойство многих множеств и функций, как выпуклость. Характер поведения многих экономических объектов связан с тем, что определенные зависимости, описывающие эти объекты, являются выпуклыми. С выпуклостью функций и множеств часто связано существование или единственность решения экономических задач; на этом же свойстве основаны многие вычислительные алгоритмы.

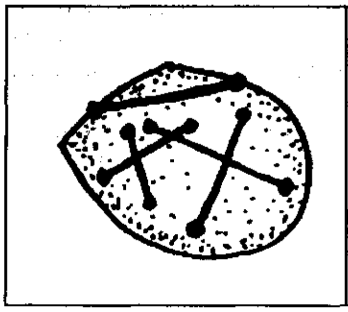
Справедливость многих утверждений, относящихся к выпуклым множествам и функциям, совершенно ясна, они почти очевидны. В то же время их доказательство зачастую очень сложно. Поэтому здесь будут изложены некоторые основные факты, связанные с выпуклостью, без доказательств, в расчете на их интуитивную убедительность.

1. Выпуклые множества на плоскости

Любая геометрическая фигура на плоскости может рассматриваться как множество точек, принадлежащих этой фигуре. Одни множества (например, круг, прямоугольник, полоса между параллельными прямыми) содержат и внутренние, и граничные точки; другие (например, отрезок, окружность) состоят только из граничных точек.

Множество точек на плоскости называется выпуклым, если оно обладает следующим свойством: отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве (рис. 1).

Примерами выпуклых множеств являются: треугольник, отрезок, полуплоскость (часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой), вся плоскость. Другие примеры выпуклых множеств приведены на рис. 2а. На рис. 2б приведены примеры невыпуклых множеств.



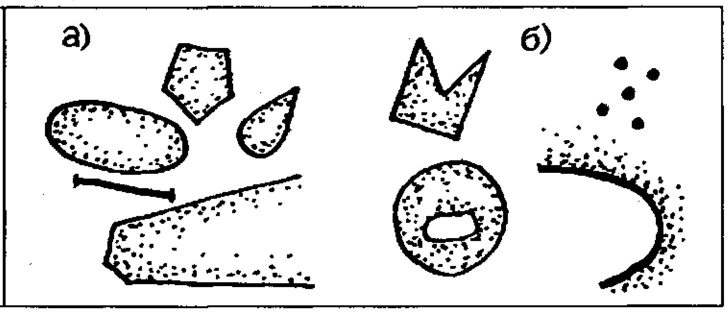


Рис. 1.
Отрезок, соединяющий любые две точки выпуклой фигуры, содержится в ней целиком
Рис. 2а,б.
Выпуклые (а) и невыпуклые (б) множества на плоскости

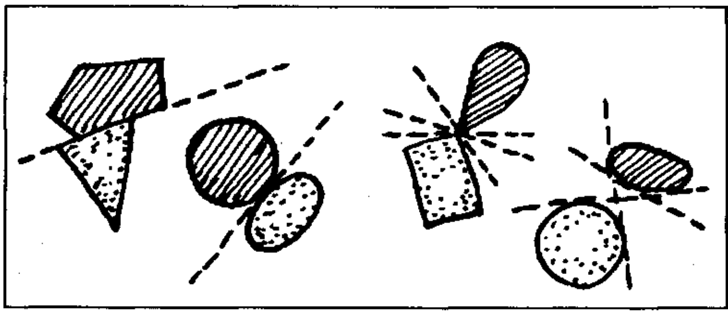
Множество, состоящее из одной-единственной точки, и пустое множество, не содержащее ни одной точки, по принятому соглашению, также считаются выпуклыми. Во всяком случае, в этих множествах невозможно провести отрезок, соединяющий какие-то точки этих множеств и не принадлежащий этим множествам целиком, — в них вообще невозможно выбрать две точки. Поэтому их включение в число выпуклых множеств не приведет к противоречию с определением, а для математических рассуждений этого достаточно.

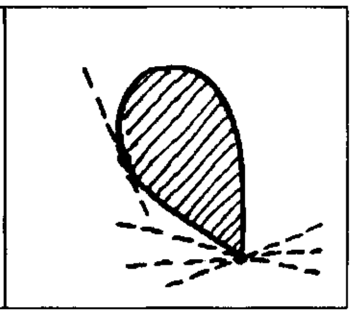
Пересечение, то есть общая часть двух выпуклых множеств, всегда выпукло: взяв любые две точки пересечения (а они — общие, то есть принадлежат каждому из пересекающихся множеств) и соединив их отрезком, мы легко убеждаемся в том, что все точки отрезка являются общими для обоих множеств, так как каждое из них выпукло. Выпуклым будет и пересечение любого числа выпуклых множеств.

Важным свойством выпуклых множеств является их отделимость: если два выпуклых множества не имеют общих внутренних точек, то плоскость можно разрезать по прямой таким образом, что одно из множеств будет целиком лежать в одной полуплоскости, а другое — в другой (на линии разреза могут располагаться точки обоих множеств). Отделяющая их прямая в одних случаях оказывается единственно возможной, в других — нет (рис. 3).

Граничная точка любого выпуклого множества сама может рассматриваться как выпуклое множество, не имеющее с исходным множеством общих внутренних точек; следовательно, она

Рис. 3.
Отделяющие прямые
Рис. 4.
Опорные прямые





может быть отделена от него некоторой прямой. Прямая, отделяющая от выпуклого множества его граничную точку, называется **опорной прямой** этого множества в данной точке. Опорные прямые в одних точках контура могут быть единственными, в других — не единственными (рис. 4).

Введем на плоскости систему декартовых координат x, y. Теперь у нас появилась возможность рассматривать различные фигуры как множества таких точек, координаты которых удовлетворяют тем или иным уравнениям или неравенствам (если координаты точки удовлетворяют какому-либо условию, будем для краткости говорить, что сама точка удовлетворяет этому условию).

Упражнение 1.

Рассмотрите фигуры, точки которых удовлетворяют неравенствам:

а) $y \geq x^2$; *б*) $xy \geq 1$; *в*) $xy \geq 1$, $x > 0$;
г) $|x| + |y| \leq 2$;
д) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$.
Какие из них выпуклы?

Линейному уравнению $ax + by = c$ удовлетворяют точки прямой. Иными словами, прямая является решением этого уравнения. Решением линейного неравенства

$$ax + by \geq c \qquad (1)$$

является полуплоскость (проверьте!).

Рассмотрим систему из N неравенств вида (1):

$$a_i x + b_i y \geq c_i, \quad i = 1,2,\ldots,N. \qquad (2)$$

Решением каждого из неравенств является полуплоскость. Решение системы — это множество точек, каждая из которых удовлетворяет всем неравенствам системы, то есть решение системы неравенств — это пересечение всех решений отдельных неравенств, составляющих систему. Полуплоскость — выпуклое множество, а пересечение выпуклых множеств всегда выпукло. Таким образом, решение системы (2) — выпуклое множество. На рис. 5 показано решение системы неравенств

$$\begin{cases} x - y \geq -1; \\ x + 2y \geq 5; \\ -2x - y \geq -7. \end{cases}$$

Заметим, что неравенство $ax + by \leq c$ может быть заменено равносильным ему неравенством $-ax - by \geq -c$, имеющим вид (1). Кроме того, уравнение $ax + by = c$ равносильно такой паре неравенств:

$$\begin{cases} ax + by \geq c; \\ ax + by \leq c. \end{cases}$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений и неравенств — всегда выпуклое множество.

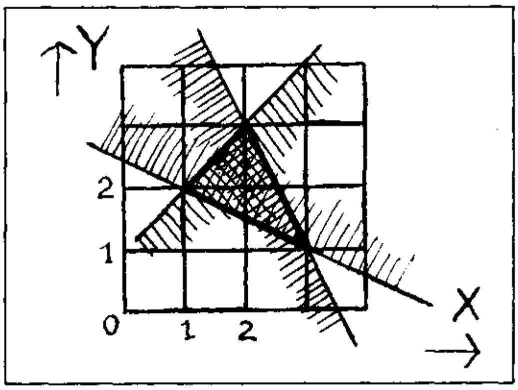
Упражнение 2.

Будет ли решение системы

$$a_i x + b_i y > c_i, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

выпуклым множеством? Чем оно отличается от решения системы (2) ?

Рис. 5.
Решение системы из трех линейных неравенств



Упражнение 3.

Придумайте системы неравенств, решениями которых будут: а) параллелограмм; б) внутренность угла; в) полоса между двумя параллельными прямыми; г) единственная точка; д) пустое множество.

2. Выпуклые функции одной переменной

Проще всего определить выпуклую функцию геометрически. Для этого полезно ввести понятие **надграфика** функции. Надграфиком функции называется множество точек, расположенных над графиком функции и на самом графике. Более строго, надграфик функции $f(x)$ — это множество таких точек, координата x которых лежит в области определения функции, а координата y удовлетворяет неравенству $y \geq f(x)$.

Функция называется выпуклой вниз, если ее надграфик — выпуклое множество. Рис. 6 иллюстрирует это определение.

Приведенное определение является вполне строгим и может быть однозначно переведено на аналитический язык.

Во-первых, функция $f(x)$ должна иметь выпуклую область определения — отрезок, луч или всю прямую.

Рис. 6.
Надграфик выпуклой функции
Рис. 7.
Точка хорды не может располагаться ниже графика

В противном случае надграфик распался бы на несколько отдельных областей, и отрезок, соединяющий точки из разных областей, проходил бы через "запретную зону".

Для выяснения того, какому условию должны отвечать значения выпуклой вниз функции $f(x)$, выберем какие-либо две точки M_1 и M_2 на ее графике и проведем хорду M_1M_2 (рис. 7). Она целиком должна лежать в надграфике, то есть надграфику должна принадлежать любая точка M хорды.

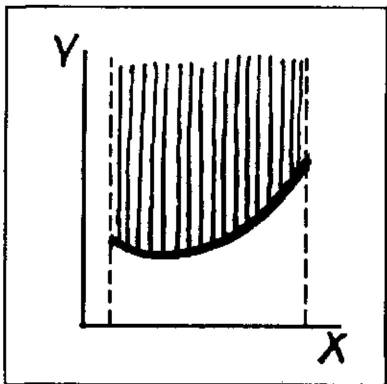
Рассмотрим число λ, показывающее, в какой пропорции точка M делит хорду :

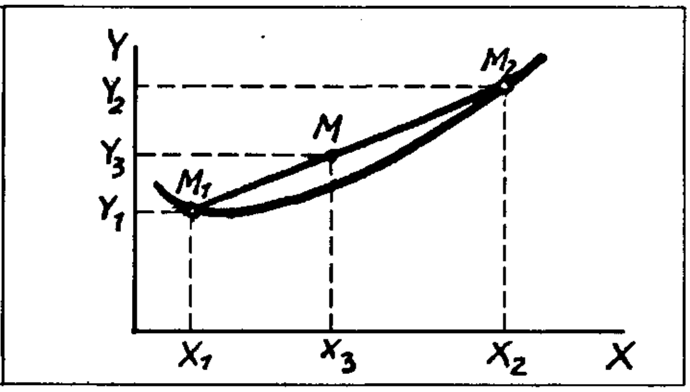
$$\lambda = \frac{|M_2M|}{|M_2M_1|}.$$

Эта величина лежит в пределах $0 \leq \lambda \leq 1$. Ясно, что в такой же пропорции абсцисса и ордината точки M делят отрезки $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$:

$$x_2 - x_3 = \lambda \cdot (x_2 - x_1);$$
$$y_2 - y_3 = \lambda \cdot (y_2 - y_1)$$
или
$$x_3 = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2;$$
$$y_3 = \lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2.$$

Условие принадлежности точки M надграфику — это выполнение неравенства $y_3 \geq f(x_3)$. А так как $y_1 = f(x_1)$, $y_2 \geq f(x_2)$ — это неравенство можно представить в виде:





$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2). \quad (3)$$

Если неравенство (3) выполняется для любых значений x_1 и x_2, то любая хорда лежит в надграфике; тем более в надграфике лежит любой отрезок, соединяющий точки, расположенные выше.

Таким образом, функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве, выпукла вниз, если она обладает следующим свойством: для любых двух чисел x_1 и x_2 из области определения функции и любого числа λ из отрезка [0, 1] выполняется неравенство (3).

Неравенство (3) часто записывают в "симметричном" виде

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \quad (4)$$

где

$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Аналогично можно определить и функции, выпуклые вверх: для этого нужно знаки неравенства (3) и (4) заменить на противоположные.

Функции, выпуклые вниз, часто называют просто "выпуклыми".

Выпуклые функции обладают свойством более общим, чем неравенство (4). Если $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — произвольные значения аргумента $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ — неотрицательные числа, сумма которых равна единице, то

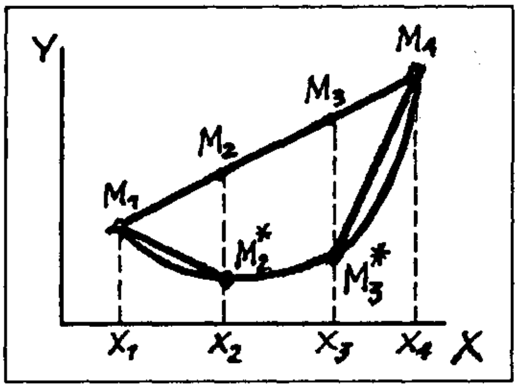


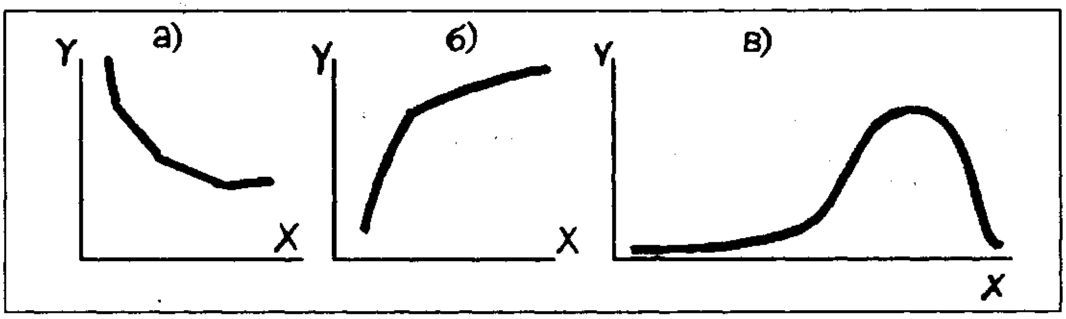
Рис. 9.
Хорда, проведенная в области больших значений аргумента, имеет больший угол наклона, чем хорда в области малых значений

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right)$$

Выберем четыре значения аргумента $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ и проведем хорду M_1M_4 (рис. 9).

Промежуточные точки M_2 и M_3 лежат в надграфике, так что угол наклона хорды $M_1M_2^*$ не больше, а хорды $M_3^*M_4$ — не меньше, чем угол наклона хорды M_1M_4 к оси абсцисс (углы наклона — с учетом знаков!). Следовательно, скорость возрастания выпуклой функции в области "больших" значений аргумента (на участке $[x_3, x_4]$)не меньше, чем в области "малых" значений ($[x_1, x_2]$). Переходя к пределам при $x_2 \to x_1$ и $x_4 \to x_3$, найдем, что $f'(x_3) \geq f'(x_1)$, то есть производная $f'(x)$ дифференцируемой выпуклой функции $f(x)$ — не-

Рис. 8.
Функции: а) выпуклая вниз, б) выпуклая вверх в) не имеющая постоянного знака выпуклости



убывающая функция.

Если производная $f'(x)$ дифференцируема (то есть выпуклая функция $f(x)$ дважды дифференцируема), то $f''(x) \geq 0$. Для дважды дифференцируемых функций это неравенство оказывается равносильным приведенному выше определению выпуклой функции; в курсах математического анализа выпуклость обычно определяют по знаку второй производной. Но в экономических приложениях, где часто приходится иметь дело с функциями, графики которых имеют изломы, такое определение оказывается мало полезным.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклые функции и $a \geq 0$, то выпуклыми будут функции

а) $a \cdot f(x)$;
б) $f(x) + g(x)$;
в) $\max(f(x), g(x))$.

Выпуклость функций в а) и б) проверяется непосредственно с помощью неравенства (3) или (4). Функция в) при каждом x принимает значение, равное большему из значений $f(x)$ и $g(x)$ (и любому из них, если они равны). Надграфик функции $\max(f(x), g(x))$ есть пересечение надграфиков функций $f(x)$ и $g(x)$ (проверьте!) — отсюда и выпуклость функции в).

Упражнение 4.
Существуют ли функции, выпуклые вниз и выпуклые вверх одновременно?

Упражнение 5.
Как выглядит график функции $f(x) = \max(0, a + bx)$ при различных значениях параметров a и b? Выпуклы ли эти функции?

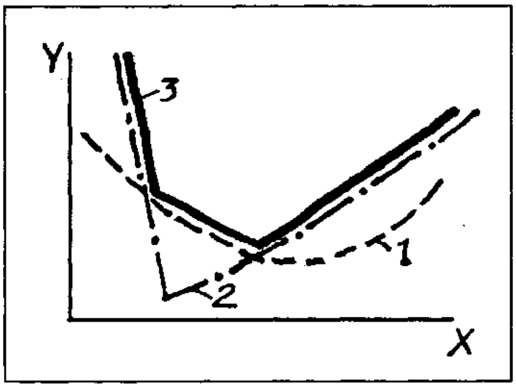


Рис. 10.
Графики функций $f(x)$ (1), $g(x)$ (2) и $\max(f(x), g(x))$ (3)

Упражнение 6.
Выпукла ли функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x),$$

где

$$f_i(x) = \max(0, a_i + b_i x)?$$

Как выглядит ее график?

Упражнение 7.
Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 0; \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2} + b \cdot (x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$$

При каких значения a и b эта функция
— выпукла вниз?
— выпукла вверх?
— не имеет постоянного знака выпуклости?