Математическое приложение

Математика производственных функций

Эластичность производственной функции и отдача от масштаба

В настоящем пункте мы несколько раз будем ссылаться на Математическое приложение «Эластичность функции» (вып. 1), которое для краткости будем обозначать «ЭФ».

Как указывалось в лекции 22, предельный продукт некоторого ресурса характеризует *абсолютное* изменение выпуска продукта, приходящегося на единицу изменения расхода данного ресурса, причем изменения предполагаются малыми. Для производственной функции $q = f(x_1, \ldots, x_n)$ предельный продукт i-го ресурса равен частной производной:

$$MP_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Влияние *относительного* изменения расхода i-го фактора на выпуск продукта, представленное также в *относительной* форме, характеризуется *частной эластичностью* выпуска по затратам этого продукта:

$$E_{x_i}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f}$$

(см. «ЭФ»). Для простоты будем обозначать $E_{x_i}[f] = e_i$. Частная эластичность производственной функции равна отношению предельного продукта данного ресурса к его среднему продукту.

Рассмотрим частный случай, когда эластичность производственной функции по некоторому аргументу — постоянная величина. Если по отношению к исходным значениям аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ один из аргументов (i-й) изменится в λ раз, а остальные останутся на прежних уровнях, то изменение выпуска продукта описывается степенной функцией:

$$q = A\lambda^{e_i}$$

(см. «ЭФ», формула (8) и упражнение 3). Полагая $\lambda = 1$ найдем, что $A = f(x_1, \ldots, x_n)$, и поэтому

$$q = \lambda^{e_i} f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

В общем случае, когда эластичность — переменная величина, равенство (1) является приближенным при значениях λ, близких к единице, т. е. при $\lambda = 1 + \varepsilon$, и тем более точным, чем ближе $|\varepsilon|$ к нулю.

Пусть теперь затраты всех ресурсов изменились пропорционально, т. е. затраты каждого изменились в λ раз. Последовательно применяя только что описанный прием к $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно убедиться в том, что теперь

$$q \approx \lambda^{e_1} \lambda^{e_2} \cdot \ldots \cdot \lambda^{e_n} f(x_1, \ldots, x_n),$$

или

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \approx \lambda^{e_1+e_2+\ldots+e_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Сумма частных эластичностей некоторой функции по всем ее аргументам получила название *полной эластичности* функции. Вводя обозначение

$$E = \sum_i e_i$$

для полной эластичности производственной функции, мы можем представить полученный результат в виде

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \approx \lambda^E f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Равенство (2) показывает, что полная эластичность производственной функции позволяет дать отдаче от масштаба числовое выражение. Пусть расход всех ресурсов немного увеличился с сохранением всех пропорций ($\lambda > 1$). Если $E > 1$, то выпуск продукции увеличился больше, чем в λ раз (возрастающая отдача от масштаба), а если $E < 1$, то меньше, чем в λ раз. При $E = 1$ выпуск продукции изменится в той же самой пропорции, что и затраты всех ресурсов (постоянная отдача).

Выделение *короткого* и *длительного* периодов при описании характеристик производства — грубая схематизация. Изменение объемов потребления различных ресурсов — энергии, материалов, рабочей силы, станков, зданий и т. д. — требует различного времени. Допустим, что ресурсы перенумерованы в порядке убывания подвижности: быстрее всего можно изменить x_1, затем x_2 и т. д., а изменение x_n требует наибольшего времени. Можно выделить сверхкороткий, или нулевой, период, когда не может измениться ни один фактор; 1-й период, когда изменяется только x_1; 2-й период, допускающий изменение x_1 и x_2 и т. д.; наконец, длительный, или n-й период, в течение которого могут измениться объемы всех ресурсов. Различных периодов, таким образом, оказывается $n + 1$.

Рассматривая некоторый промежуточный по величине, k-й период, мы можем говорить о соответствующей этому периоду отдаче от масштаба, имея в виду пропорциональное изменение объемов тех ресурсов, которые в этом периоде могут изменяться, т. е. $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Объемы $x_{k+1}, \ldots, x_n$ при этом сохраняют фиксированные значения. Соответствующий этому периоду показатель отдачи от масштаба равен

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_k.$$

Удлинняя период, мы добавляем к этой сумме следующие слагаемые, пока не получится значение E для длительного периода.

Поскольку производственная функция возрастает по каждому аргументу, все частные эластичности e_i положительны. Отсюда следует, что чем продолжительнее период, тем больше отдача от масштаба.

Однородные производственные функции

Равенство (2) является приближенным при λ, близком к единице. Функции, для которых при любых λ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется равенство

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

получили название *однородных* функций, а величина α — *степени однородности*. Однородные функции 1-й степени называют линейно однородными. Ниже приведены примеры однородных функций; в квадратных скобках указаны степени однородности:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \quad [1]; \qquad y = a_1\frac{x_1}{x_3} + a_2\frac{x_2}{x_3} \quad [0];$$

$$y = a_1x_1^2 + a_2x_2x_3 \quad [2];$$

$$y = ax_1^{0.2}x_2^{0.5} \quad [0.7]; \qquad y = a_1\frac{x_1}{x_2x_3} + a_2\frac{x_2}{x_1x_3} \quad [-1].$$

Функции $y = a + b_1x_1 + b_2x_2$ и $y = b_1x_1 + b_2x_2^2$ неоднородны.

Однородная функция степени α удовлетворяет *уравнению Эйлера*:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = \alpha f. \tag{3}$$

Разделив обе части уравнения Эйлера на f, получим

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f} = E = \alpha.$$

Таким образом, общая эластичность однородной функции — постоянная величина. При этом частные эластичности по каждому аргументу могут быть переменными.

Однородные функции обладают многими свойствами, делающими их весьма привлекательными для приближенного описания реальных производственных объектов.

Пропорциональному изменению всех аргументов геометрически соответствует движение вдоль луча, выходящего из начала координат. Возьмем две любые точки, лежащие на одной изокванте, скажем, A и B (рис. 1). Проведем из начала координат лучи через эти точки и отложим на них точки A' и B' так, чтобы каждый из отрезков OA' и OB' был в λ раз длиннее соответствующего отрезка OA или OB. Если исходной изокванте соответствовало значение производственной

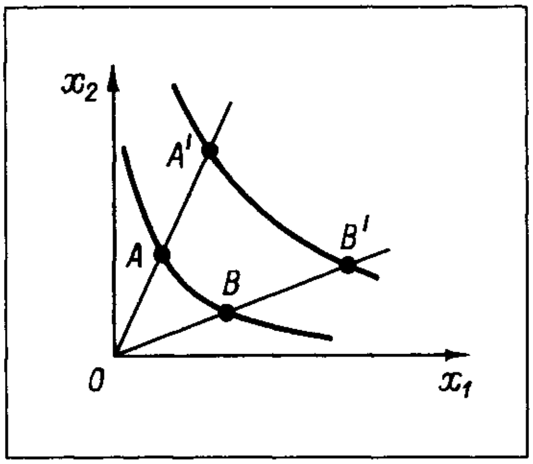

Рис. 1. Подобие изоквант однородной производственной функции.

функции q, то и точке A', и точке B' соответствует одно и то же значение $\lambda^\alpha q$, так что точки A' и B' лежат на одной изокванте. Отсюда следует, что любая изокванта однородной производственной функции может быть получена из любой другой с помощью преобразования подобия (гомотетии) с центром в начале координат.

Рассмотрим произвольную производственную функцию. Возьмем на различных изоквантах точки, в которых наклон изоквант один и тот же. Соединяющая эти точки линия называется *изоклиной* (от *гр.* $\varkappa\lambda\iota\nu\omega$ — наклонять). Иными словами, изоклина объединяет производственные варианты, характеризующиеся однаковыми значениями предельной нормы технической замены ресурсов. Как отмечалось в разделе 2 лекции 22, линия оптимального роста фирмы характеризуется постоянством предельной нормы замены, которая во всех точках этой линии равна отношению цен ресурсов. Таким образом, линия роста — это одна из изоклин производственной функции. При изменении цен ресурсов фирма «перескакивает» с одной изоклины на другую.

Из подобия изоквант однородной функции следует, что в точках одного луча, выходящего из начала координат, все изокванты имеют

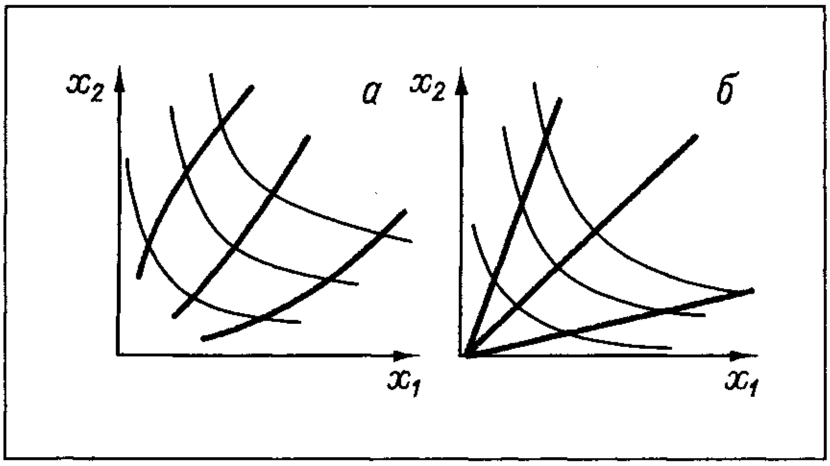

Рис. 2. Семейства изоклин производственных функций общего вида (*а*) и однородной (*б*).

один и тот же наклон. Таким образом, все изоклины однородной производственной функции (и, в частности, линия оптимального роста) — лучи, выходящие из начала координат (рис. 2, *б*).

Однородность производственной функции существенно упрощает анализ отдачи от масштаба. Прежде всего степень однородности характеризует влияние масштаба затрат ресурсов на выпуск продукции при любых изменениях масштаба (а не только при малых, как общая эластичность произвольной функции). Не менее важно и то обстоятельство, что изменение масштаба выпуска продукции в случае однородной производственной функции происходит путем пропорционального изменения расхода ресурсов, поскольку в этом случае такой характер изменения отвечает линии оптимального роста фирмы.

Функция Кобба–Дугласа

Трудно было бы ожидать, чтобы такой сложный объект, как производство, можно было описать функцией, имеющей простое аналитическое выражение. Однако для того чтобы производственную функцию можно было использовать не только для получения тех или иных теоретических утверждений, но и для выполнения конкретных расчетов, она должна иметь форму, допускающую количественную оценку. Как и в других областях знания, усилия ученых были направлены на отыскание таких функций, которые позволили бы с достаточной точностью описать характеристики реальных производственных объектов и исследовать их свойства.

В 1928 г. К. У. Кобб и П. Х. Дуглас для описания зависимости объема продукции отрасли от затрат труда (L) и капитала (K) предложили следующую функцию:

$$q = AL^{\alpha_L} K^{\alpha_K}. \tag{4}$$

До настоящего времени функция Кобба–Дугласа наряду с некоторыми другими широко используется для приближения производственных функций различных объектов. В более общем случае функцией Кобба–Дугласа называют функцию

$$q = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \tag{5}$$

Функция Кобба–Дугласа — степенная функция всех своих аргументов; ее частные эластичности e_i постоянны и совпадают с параметрами α_i. Это однородная функция степени

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

так что сумма показателей степени в функциях (4) или (5) служит показателем отдачи от масштаба. Если отдача от масштаба постоянна, то эта сумма равна единице.

Дифференцируя функцию (4) по L, найдем предельный продукт труда:

$$MP_L = \alpha_L A L^{\alpha_L - 1} K^{\alpha_K} = \frac{\alpha_L q}{L}.$$

Аналогично получим выражение для предельного продукта капитала:

$$MP_K = \frac{\alpha_K q}{K}.$$

Отсюда следует выражение для предельной нормы замены труда капиталом:

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha_L}{\alpha_K} \cdot \frac{K}{L}.$$

Итак, если производство описывается функцией Кобба–Дугласа, то прирост капитала, замещающий единицу труда, пропорционален уже достигнутой фондовооруженности труда (отношению величины капитала к затратам труда).

Аналогичные соотношения имеют место и для функции вида (5).

Прологарифмировав обе части равенства (5), придем к выражению

$$\ln q = \ln A + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \ldots + \alpha_n \ln x_n.$$

Отсюда видно, что логарифм объема продукта $y = \ln q$ и логарифмы затрат ресурсов $z_i = \ln x_i$ связаны линейным соотношением

$$y = a + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n,$$

где $a = \ln A$. Это обстоятельство широко используется для оценки параметров функции Кобба–Дугласа по реальным данным: подбор параметров линейной функции представляет собой сравнительно несложную задачу. Эта задача становится особенно простой, если производственная функция имеет вид (4) и к тому же исследователь по тем или иным соображениям исходит из постоянства отдачи от масштаба. В этом случае $\alpha_L = 1 - \alpha_K$; разделив обе части равенства (4) на L, приходим к выражению

$$\frac{q}{L} = A L^{-\alpha_K} K^{\alpha_K} = A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha_K},$$

связывающему средний продукт труда с его фондовооруженностью. Эта связь описывается функцией с постоянной эластичностью, и численная оценка ее параметров по данным наблюдения может производится подобно тому, как это было сделано в разделе 2 лекции 7 при определении эластичности спроса.

Предельная выручка

Основные соотношения

Предельная выручка используется в качестве одного из основных средств анализа поведения фирм в условиях различных рыночных структур. Многие результаты, приведенные в 26-й и последующих лекциях, основываются на том, что фирма, стремящаяся к максимуму прибыли, выбирает такой объем производства, при котором выполняется равенство

$$MR = MC. \tag{1}$$

Заметим, что если TR и TC — непрерывно дифференцируемые функции объема производства, то равенство (1) является лишь необходимым условием максимума прибыли. Если при некотором объеме имеет место неравенство $MR > MC$, то небольшое увеличение объема выпуска позволит получить дополнительную выручку, превышающую дополнительные затраты, и прибыль фирмы возрастет. При $MR < MC$ ситуация будет противоположной. Поэтому значение Q_0 объема выпуска соответствует максимуму прибыли, если в окрестности Q_0 при $Q < Q_0$ имеет место неравенство $MR > MC$, а при $Q > Q_0$ оказывается, что $MR < MC$. Именно это побудит фирму увеличить выпуск, если объем меньше Q_0, и уменьшить, если больше. На рис. 1 равенство (1) выполняется в трех точках; при этом Q_0 и Q_2 соответствуют локальным максимумам, Q_1 — локальному минимуму прибыли. Вследствие различных особенностей формирования спроса на продукцию фирмы форма кривой MR, как мы увидим, может быть довольно причудливой и может допускать пересечения любых типов с кривой MC.

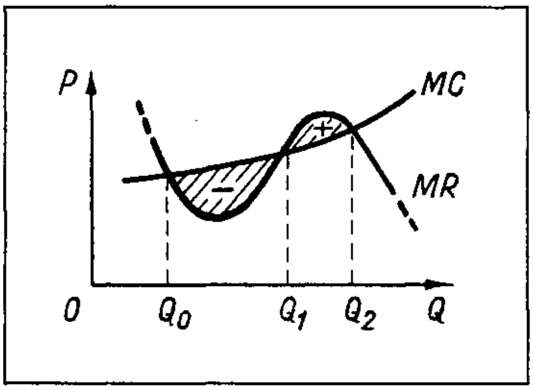

Рис. 1. Точки локальных максимумов (Q_0,Q_2) и локального минимума (Q_1) прибыли.

Поведение функции предельной выручки заслуживает специального рассмотрения.

Пусть функция $P = P_D(Q)$ описывает зависимость цены спроса на продукцию фирмы от предлагаемого объема. В лекции 26 выведено основное выражение для предельной выручки:

$$MR(Q) = P_D(Q) + QP'_D(Q), \tag{2}$$

где штрих означает дифференцирование.

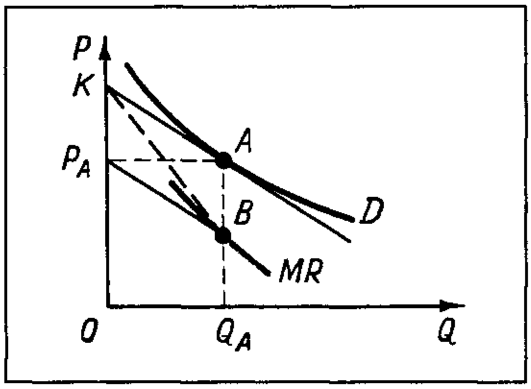

Рис. 2. Построение точки на кривой предельной выручки.

Если кривая спроса построена, то можно графически найти значение MR при любом объеме продукта. Возьмем точку A на кривой спроса (рис. 2). Точка B на кривой MR должна располагаться ниже точки A на величину $|Q_A P_D'(Q_A)|$. Но $P_D'(Q_A)$ — это угловой коэффициент наклона касательной AK к кривой спроса в точке A. Поэтому точку B можно найти, проведя через точку P_A прямую, параллельную касательной AK до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки A на ось абсцисс. Заметим, что $KABP_A$ — параллелограмм, и точку B можно было бы найти иначе, сместив точку A вниз на длину отрезка KP_A. Еще один способ получим, воспользовавшись тем, что прямая BK, пересекаясь с отрезком $P_A A$, делит его пополам.

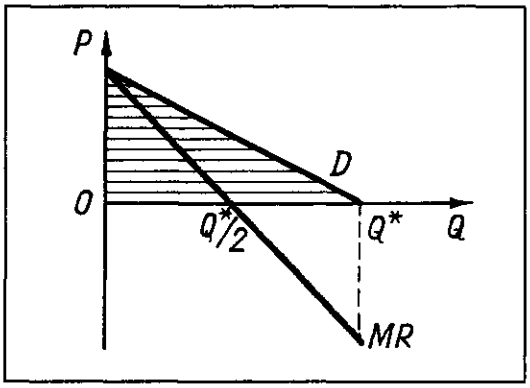

Рис. 3. Кривая предельной выручки в случае линейного спроса.

Последний способ построения позволяет отметить полезное свойство графика предельной выручки в случаях, когда спрос описывается линейной функцией. Так как касательная к прямой в любой ее точке — это та же самая прямая, линия предельной выручки — это прямая, проходящая через середины всех горизонтальных отрезков, показанных на рис. 3.

Рассматривая прибыль как функцию объема производства, $\Pi(Q)$, мы можем связать ее приращение с функциями $MR(Q)$ и $MC(Q)$. Так как

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = MR(Q) - MC(Q),$$

то при увеличении объема выпуска от Q_1 до Q_2 прибыль получает приращение

$$\Pi(Q_2) - \Pi(Q_1) = \int_{Q_1}^{Q_2} [MR(Q) - MC(Q)]dQ.$$

Графически это приращение прибыли выражается площадью между кривыми MR и MC над отрезком $[Q_1, Q_2]$, причем площадь считается положительной при $MR > MC$ и отрицательной при $MR < MC$.

Вернемся к рис. 1 и попытаемся выяснить, какой из локальных максимумов прибыли (Q_0 или Q_2) является абсолютным. Для этого нужно узнать, каким будет приращение прибыли — положительным или отрицательным — при переходе от Q_0 к Q_2. В случае, представленном на рис. 1, «отрицательная» площадь по абсолютной величине больше, чем «положительная», так что $\Pi(Q_0) > \Pi(Q_2)$. Следовательно, абсолютному максимуму прибыли соответствует объем Q_0.

Постоянная эластичность спроса

Помимо равенства (2) в лекции 26 приведено еще одно выражение для предельной выручки:

$$MR(Q) = P_D(Q)\left(1 - \frac{1}{\eta}\right), \tag{3}$$

где η — коэффициент эластичности спроса по цене. В общем случае эластичность спроса — переменная величина, она может изменяться от точки к точке.

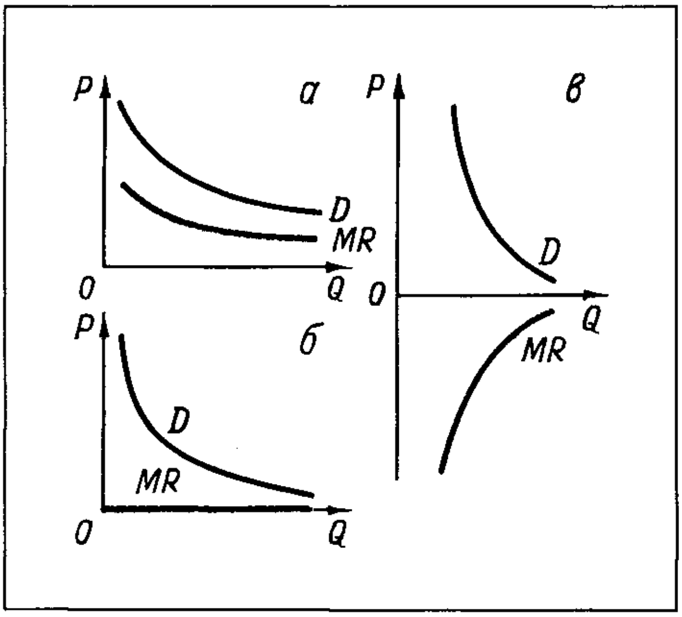

Рис. 4. Предельная выручка при постоянной эластичности спроса.
а — $\eta = 2$; *б* — $\eta = 1$; *в* — $\eta = 0.5$.

Допустим, однако, что спрос на некоторый товар обладает постоянной эластичностью во всем диапазоне изменений объемов и цен. В этом случае, как показывает равенство (3), при любом объеме предельная выручка отличается от цены спроса постоянным множителем

$(1-1/\eta)$. Но этот множитель положителен лишь при высокой эластичности (рис. 4, *а*). При $\eta = 1$, а это имеет место, если $P_D(Q) = a/Q$, предельная выручка тождественно равна нулю (рис. 4, *б*). Такой вывод согласуется с тем, что в нашем случае общая выручка $TR = a$ — постоянная величина. Наконец, при низкой эластичности ($\eta < 1$) предельная выручка отрицательна для любых значений объема выпуска (рис. 4, *в*).

Если фирма-монополист встретится со спросом, имеющим единичную или низкую эластичность, то условие максимума прибыли не выполняется ни при каком объеме продукта: так как $MC > 0$, неравенство $MR < MC$ будет выполняться при любых объемах, и чем меньше Q, тем больше окажется прибыль фирмы (хотя при $Q = 0$ фирма не только не получит прибыли, но будет нести убытки в размере постоянных затрат!).

Парадоксальность ситуации связана с тем, что здесь использовано предположение о низкой эластичности спроса при сколь угодно высоких ценах. Но доход потребителя ограничен. Обозначая через q объем индивидуального спроса, через y — доход, мы можем утверждать, что индивидуальный спрос удовлетворяет неравенству $Pq \leq y$. Сложив доходы всех потребителей, мы получим аналогичное неравенство, которому должен удовлетворять рыночный спрос:

$$PQ \leq Y.$$

Здесь Q — объем рыночного спроса; Y — сумма доходов потребителей. Таким образом, кривая спроса должна располагаться ниже гиперболы $P = Y/Q$.

Однако, если эластичность спроса постоянна и $\eta < 1$, то неравенство $PaP^{-\eta} \leq Y$ при больших P будет нарушено, каковы бы ни были постоянные a и Y. Следовательно, если цена превышает некоторый уровень, то спрос не может быть низкоэластичным. Отметим также, что если $\eta > 1$, то неравенство $PaP^{-\eta} \leq Y$ будет нарушаться при значениях P, близких к нулю, так что в этом диапазоне спрос не может быть высокоэластичным.

Можно высказать и более сильное утверждение. Так как фундаментальных потребностей у человека не так уж много, любой товар имеет какие-то заменители, пусть и не очень близкие. И если цена данного товара чрезмерно велика, потребитель от него откажется. Поэтому вполне реалистичным представляется допущение о существовании максимальной цены $P^* = P_D(0)$, так что $\eta \to \infty$ при $Q \to 0$. Как показывает равенство (2), при этом $MR(0) = P_D(0)$.

Изломы и другие особенности кривой спроса

На кривой спроса могут быть такие точки, в которых касательные, проведенные слева и справа, не совпадают (рис. 5). Такие точки называются точками излома кривой. Говорят также о точках излома функции, подразумевая под ними значения аргумента, при прохождении которых производная изменяется скачком.

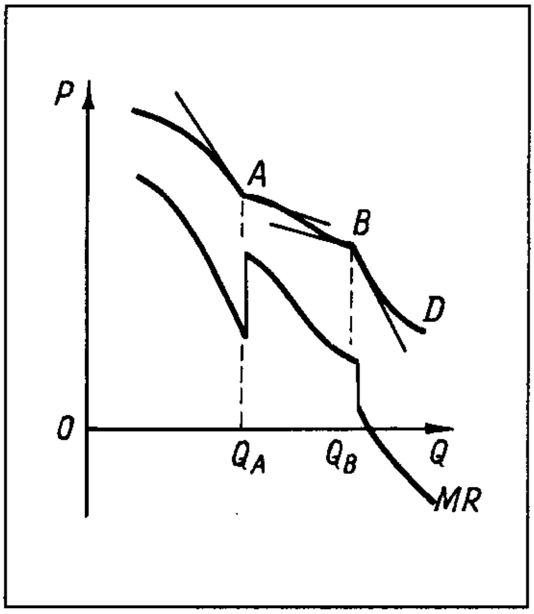

Рис. 5. Изломы на кривой спроса и скачки предельной выручки — положительный при $Q = Q_A$ и отрицательный при $Q = Q_B$.

Как показывает равенство (2), если при некотором значении Q кривая спроса имеет излом, то предельная выручка при этом значении Q претерпевает скачок, положительный или отрицательный — в зависимости от того, возрастает или убывает наклон касательной (с учетом знака!) при переходе через эту точку.

Из кривых такого рода простейшими являются двухзвенные ломаные. Кривые MR на рис. 6 построены с использованием свойства, показанного на рис. 3: левый участок — это отрезок прямой, проведенной через точку P^* и середину отрезка $P_A A$; правый — отрезок прямой, проходящей через середины отрезков $P_A A$ и OQ^*.

Ломаная кривая спроса, порождающая отрицательный скачок MR, представлена на рис. 6, *а*. Такая кривая спроса используется в одной из моделей олигополии и обсуждается в лекции 29. Если предельные затраты представлены кривой MC, то оптимальный объем равен Q_A. Правда, равенство (1), строго говоря, не выполняется, так как значение MR при $Q = Q_A$ не определено. Но слева от этой точки $MR > MC$, а справа $MR < MC$, откуда и следует оптимальность объема Q_A. Это значение объема останется оптимальным и при некотором увеличении или уменьшении предельных затрат (кривые MC_1 и MC_2).

Подобный характер спроса на продукцию фирмы имеет место и при монополистической конкуренции. Так как данная фирма и ее конкуренты производят товары — близкие заменители, то при повышении цены выше некоторого уровня (на рис. 6 это P_A) объем продаж резко сокращается. Такие фирмы также должны обнаруживать тяготение к объемам производства, соответствующим излому кривой спроса.

На рис. 6, *б* представлена противоположная ситуация. При положительном скачке MR может оказаться, что условия максимума прибыли выполняются при двух значениях объема выпуска, Q_1 и Q_2

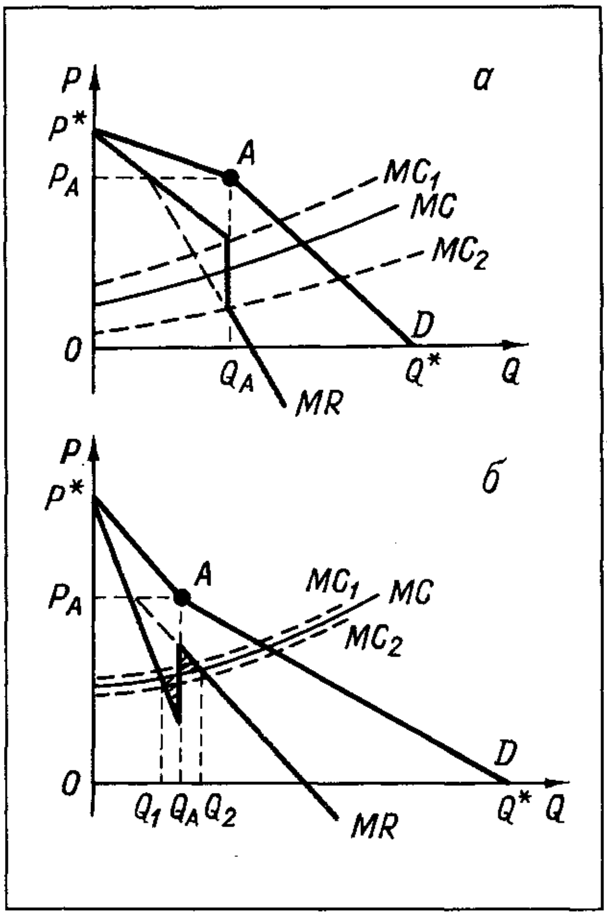

Рис. 6. Максимизация прибыли в случаях ломаной линии спроса.

(в точке Q_A прибыль имеет локальный минимум). Вопрос о том, какой из объемов, Q_1 или Q_2, соответствует глобальному максимуму, решается в зависимости от соотношения площадей заштрихованных треугольников; по существу он уже рассмотрен в первом разделе. На рис. 6, *б* кривая MC проведена так, что площади обоих треугольников одинаковы, так что объемы Q_1 и Q_2 приносят фирме одинаковую прибыль. Но если предельные затраты немного возрастут (кривая MC_1), то единственный оптимальный объем окажется несколько меньше Q_1, а если немного снизятся (кривая MC_2), то больше, чем Q_2. Таким образом, при малых отклонениях предельных затрат от MC оптимум будет перескакивать от объема Q_1 к объему Q_2 — поведение фирмы будет неустойчивым.

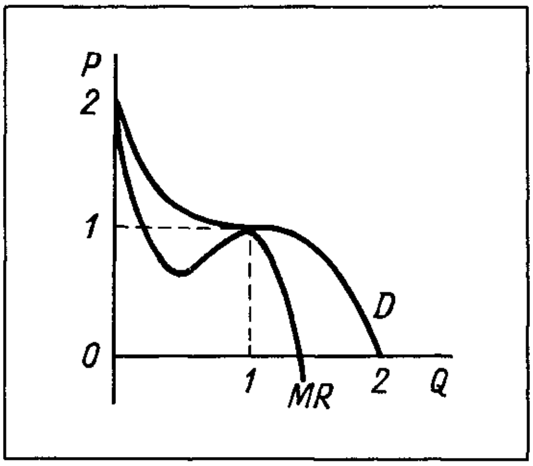

Рис. 7. Кривая спроса с «горизонтальной площадкой» и предельная выручка.

Из других возможных особенностей спроса выделим так называемую горизонтальную площадку (см. лекцию 20). Если при некотором объеме спроса оказывается $P'_D(Q) = 0$, то, как показывает выражение (2), при этом объеме $MR(Q) = P_D(Q)$. На рис. 7 приведены кривая спроса, описывающаяся уравнением

$$P_D(Q) = 1 + (1 - Q)^3,$$

и соответствующая ей кривая предельной выручки. В качестве упражнения найдите аналитическое выражение и рассчитайте значения функции $MR(Q)$ для данного случая.

Наконец, поскольку теория допускает существование товаров Гиффена (см. лекцию 16), небезынтересно выяснить, как выглядит предельная выручка на рынке таких товаров.

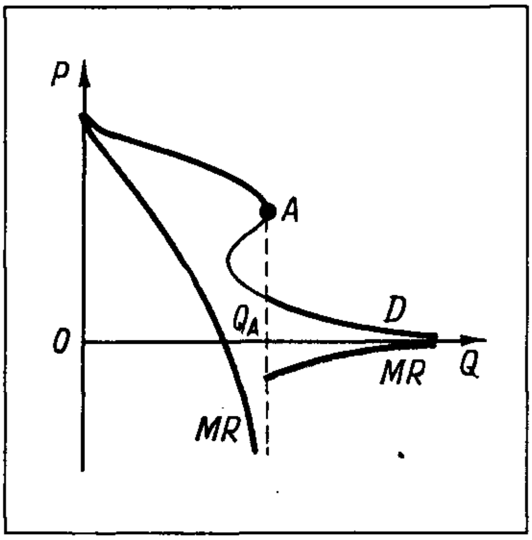

Рис. 8. Кривая спроса и предельная выручка в случае эффекта Гиффена.

Эффект Гиффена состоит в том, что на некотором участке кривая спроса имеет положительный наклон (рис. 8). Несмотря на «коленчатый» характер этой кривой, цена спроса определена однозначно: это максимальная цена, по которой может быть продан данный объем товара. На рисунке жирной линией выделена часть кривой спроса, являющаяся графиком функции $P_D(Q)$. При значении объема Q_A цена спроса имеет разрыв; предельная выручка стремится к $-\infty$, если Q стремится к Q_A слева, а справа принимает конечное значение (на рисунке оно отрицательно, что согласуется с предположением о низкой эластичности спроса на соответствующем участке кривой).

Игровая модель олигополии

Что такое «игра»?

В лекции 29 процесс принятия решения одной из олигополистических фирм сравнивался с раздумьями шахматиста над очередным ходом. Такое сравнение не случайно. Обе задачи относятся к ситуациям, которые называют *игровыми* и которые являются предметом теории игр — раздела математики, развившегося в XX в.

В любой игре участвуют как минимум два игрока, каждый из которых преследует свои собственные цели (в этом смысле пасьянс или кубик Рубика — не игры). Каждый из игроков выбирает свой *ход*, комбинация выборов всех игроков определяет складывающуюся *позицию*, и от позиции в конечном счете зависит *выигрыш* каждого игрока. Мы не будем здесь определять значения терминов, выделенных курсивом, — в каждой игре они имеют свой конкретный смысл.

Подчеркнем основную особенность игровой ситуации; выигрыш каждого участника зависит не только от его собственного выбора (как это мы видели, например, в задаче о потребительском оптимуме), но и от выбора всех остальных участников игры. Интересы отдельных игроков не совпадают. Поэтому выбора, оптимального в обычном смысле, в игровой ситуации не существует, и требуется уточнение понятия рационального поведения игроков.

Типы игровых ситуаций, рассматриваемых в теории игр, весьма разнообразны, и мы не будем пытаться дать им универсальную характеристику. Ограничимся классическим примером, иллюстрирующим характерные черты многих из них и получившим название «дилеммы заключенного».

Два преступника, назовем их А и Б, пойманы, содержатся под стражей и не могут общаться друг с другом. Следователь предлагает каждому из них сознаться в совершенных ими преступлениях. Им известно следующее:

а) если оба сознаются, каждый получит 5 лет тюрьмы;

б) если ни один из них не сознается, следствие сможет раскрыть только часть преступлений и они получат по 2 года тюрьмы;

в) если один признается, а другой — нет, то признавшийся будет наказан 1 годом, а не признавшийся — 10 годами тюрьмы.

Эти условия сведены в табл. 1, в каждой клетке которой слева указан «выигрыш» заключенного А (срок наказания со знаком «минус»), справа — заключенного Б. Что в таких условиях должен выбрать заключенный?

Таблица 1

«Выигрыши» заключенных

Выбор А	Выбор Б	
	сознаться	не сознаваться
Сознаться	−5, −5	−1, −10
Не сознаваться	−10, −1	−2, −2

Если бы заключенные могли сговориться, они, скорее всего, решили бы не сознаваться, и каждый был бы приговорен к двум годам. Однако при этом каждый из них должен иметь твердые гарантии того, что другой не нарушит договоренности. А соблазн нарушить весьма велик: если А, выполняя соглашение, не сознается в преступлениях, то Б, сознавшись, получит всего 1 год, а А — 10 лет тюрьмы. Вообще, какой бы «ход» ни сделал Б, для А выгоднее сознаться. Так же может рассуждать и другой заключенный. Поэтому, действуя рационально, они оба сознаются.

Введем одно важное понятие. Положением равновесия в игре называется такое сочетание ходов ее участников, при котором для каждого участника данный его выбор дает ему наибольший выигрыш при фиксированных ходах остальных участников (равновесие по Нэшу).

В рассмотренной нами «дилемме заключенного» единственное положение равновесия — «оба сознались». Для каждого участника сознаться — лучший выбор, если другой сознался. И хотя есть другое положение, более выгодное для обоих, — «оба не сознались», оно неравновесно: каждому выгодно сделать иной выбор при данном «ходе» партнера.

В дальнейшем, при обсуждении модели олигополии, мы придем к ситуации, чрезвычайно похожей на «дилемму заключенного».

Олигополия: условия игры

Рассмотрим допущения, лежащие в основе игровой модели олигополии, приблизительно в том же виде, в каком они были предложены французским экономистом А. Курно в 1838 г., задолго до того, как теория игр выделилась в самостоятельную дисциплину.

Будем считать, что

— на рынке действуют две фирмы, производящие совершенно одинаковый товар;

— фирмам известна кривая спроса, т. е. зависимость $P = P_D(Q)$ — цены спроса от совокупного объема товара (Q), предлагаемого обеими фирмами к продаже;

— фирмы принимают решения об объеме выпуска товара *самостоятельно* и *одновременно*.

Если первая фирма решила произвести Q_1 единиц продукта, а вторая фирма — Q_2, то общее количество $Q = Q_1 + Q_2$, и на рынке установится цена

$$P = P_D(Q_1 + Q_2). \tag{1}$$

Итак, цена, по которой продает свой товар *каждая* фирма, зависит от сочетания решений, принятых *обеими* фирмами.

Рассмотрим ситуацию с точки зрения одной из фирм, скажем первой. Ее затраты (TC_1) зависят только от ее собственного выпуска (Q_1), а выручка

$$TR_1 = Q_1 \cdot P_D(Q_1 + Q_2) \tag{2}$$

и прибыль

$$\Pi_1 = TR_1 - TC_1 \tag{3}$$

зависят и от Q_1, и от Q_2. Принимая решение, фирма должна учитывать, что ее успех или неудача зависят не только от ее собственного решения, но и от решения конкурента. И так же должна рассуждать вторая фирма.

Процесс принятия решения

Итак, первая фирма определяет, сколько ей нужно произвести товара, учитывая, что вторая фирма принимает аналогичное решение. Допустим, что вторая фирма решила выпустить товар в количетве Q_2; будем считать эту величину фиксированной.

Но если выпуск второй фирмы — фиксированная величина, то рыночная цена, определяемая равенством (1), зависит только от Q_1 — от решения первой фирмы; следовательно, только от Q_1 зависят выручка и прибыль первой фирмы.

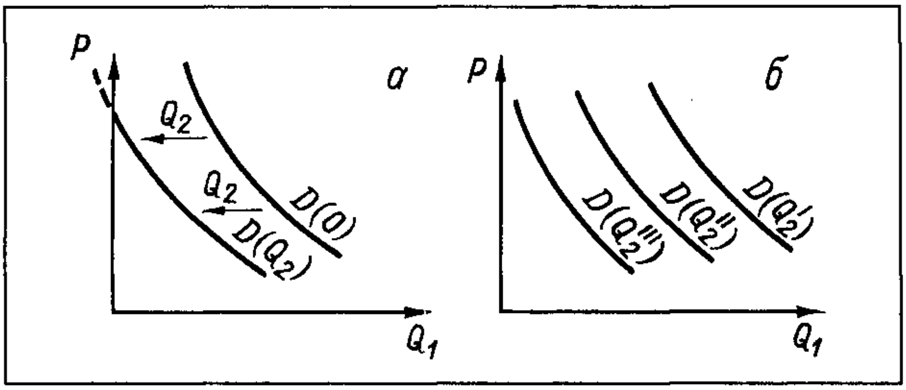

Рис. 1. Условный спрос на продукт первой фирмы при одном (*а*) и нескольких (*б*) фиксированных уровнях $Q_2(Q_2' < Q_2'' < Q_3''')$.

Для того чтобы выяснить, как цена зависит от решения первой фирмы, снова обратимся к равенству (1); воспользуемся также рис. 1. Кривая $D(Q_2)$ показывает зависимость цены от Q_1 при данном фиксированном значении Q_2. Так, $D(0)$ — это просто кривая рыночного спроса: если $Q_2 = 0$, то весь рынок находится «в руках» первой фирмы. При любом другом значении Q_2 кривая $D(Q_2)$ получается из кривой рыночного спроса сдвигом на Q_2 единиц влево.

Таким образом, если величина Q_2 фиксирована, можно условно выделить спрос на продукцию первой фирмы, представленный кривой $D(Q_2)$. Будем называть эти кривые *кривыми условного спроса* на продукцию первой фирмы. Далее первая фирма может рассуждать как монополист, выходящий на рынок с известным спросом $D(Q_2)$ и определяющий наиболее выгодный объем производства Q_1, — характер принимаемого ею решения подробно рассмотрен в лекции 26.

Итак, если бы первая фирма знала, какое решение принимает в это время вторая фирма, она могла бы сделать оптимальный при данном Q_2 выбор своего выпуска. Но суть игровой ситуации в том и состоит, что она этого не знает. Она должна предусмотреть различные возможные значения Q_2 — им соответствует семейство условных кривых спроса $D(Q_2)$ на рис. 1, *б* — и на каждый возможный «ход» конкурента найти оптимальный ответный «ход». Ее рассуждения напоминают размышления игрока, выражаемые формулой: «Если они — так, то мы — эдак». Таким образом, на этом этапе первая фирма не может однозначно определить наилучшимй объем выпуска, но может определить значение Q_1, наиболее выгодное для нее при *каждом* выбираемом конкурентом значении Q_2. Она строит так называемую *функцию реакции*:

$$Q_1 = r(Q_2), \tag{4}$$

устанавливающую связь наилучшего значения Q_1 с выбором конкурирующей фирмы.

Проиллюстрируем этот этап решения задачи примером. Для простоты будем считать, что спрос и предельные затраты фирмы описываются линейными функциями; кроме того, припишем параметрам этих функций конкретные числовые значения. Пусть

$$P_D(Q) = 200 - 2Q;$$

$$TC_1 = 600 + 80Q_1 + Q_1^2,$$

так что

$$MC_1 = 80 + 2Q_1.$$

Прежде всего посмотрим, что представляют собой кривые условного спроса на товар первой фирмы. Кривая $D(0)$, очевидно, описывается уравнением

$$P = 200 - 2Q_1;$$

для кривой $D(15)$ находим

$$P = 200 - 2(Q_1 + 15) = 170 - 2Q_1.$$

Аналогично находим, что уравнение кривой $D(30)$ имеет вид

$$P = 140 - 2Q_1$$

и т. д.

Далее, считая Q_2 фиксированным, мы рассматриваем общую выручку первой фирмы

$$TR_1 = Q_1[200 - 2(Q_1 + Q_2)] = Q_1[(200 - 2Q_2) - 2Q_1]$$

лишь как функцию Q_1. Отсюда мы можем найти предельную выручку первой фирмы:

$$MR_1 = (200 - 2Q_2) - 4Q_1.$$

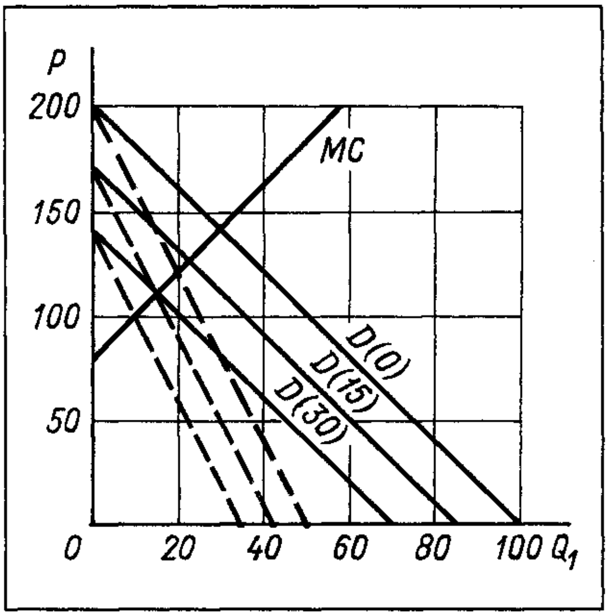

Рис. 2. Условный спрос на продукт первой фирмы в числовом примере.
Прерывистыми линиями показаны соответствующие линии предельной выручки.

Рассчитанные ранее кривые условного спроса $D(Q_2)$ и соответствующие им кривые предельной выручки показаны на рис. 2.

Наилучшим для первой фирмы является такой объем производства, при котором выполняется условие $MR_1 = MC_1$, т. е. значение Q_1 должно быть решением уравнения

$$200 - 2Q_2 - 4Q_1 = 80 + 2Q_1.$$

Решая это уравнение, находим:

$$Q_1 = 20 - \frac{1}{3}Q_2.$$

Последнее равенство показывает, какой объем производства является для первой фирмы наилучшим, если вторая производит продукт в количестве Q_2. Иными словами, оно является конкретной записью функции реакции (4) для первой фирмы при данных характеристиках спроса и затрат:

$$r_1(Q_2) = 20 - \frac{1}{3}Q_2. \qquad (5)$$

Перейдем теперь к выяснению того, какой же выбор в конце концов сделает каждая из фирм.

Равновесие Курно

Мы видели, что первая фирма, используя лишь информацию о рыночном спросе и о собственных затратах, может найти свою функцию реакции, $Q_1 = r_1(Q_2)$, на поведение конкурента. Таким же точно образом и вторая фирма может найти свою функцию реакции, $Q_2 = r_2(Q_1)$.

Но этого недостаточно. Каждая фирма должна решить, сколько продукта она должна произвести. И она пытается «угадать» действие конкурента.

Допустим, что обеим фирмам это удалось. Первая фирма предполагала, что вторая произведет определенное количество продукта Q_2 и, исходя из этого, решила выпустить Q_1 в соответствии со своей функцией реакции. А вторая, рассчитывая, что ее конкурент произведет именно такое количество продукта, определила в соответствии со своей функцией реакции значение Q_2, и это оказалось тем же самым значением, на которое рассчитывала первая фирма. Таким образом, Q_1 и Q_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= r_1(Q_2); \\ Q_2 &= r_2(Q_1). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Определяемая этой системой пара значений (Q_1, Q_2) обладает следующим свойством: первая фирма делает наиболее выгодный для себя выбор при данном значении Q_2, а вторая — наиболее выгодный для себя при данном значении Q_1. Таким образом, объемы Q_1 и Q_2, удовлетворяющие (6), образуют положение игрового равновесия, как оно было определено в первом разделе настоящего приложения. Ни одна из фирм не имеет стимулов к изменению своего решения, если другая сохраняет равновесный объем. Равновесие объемов выпуска фирм на олигопольном рынке получило название *равновесия Курно*.

Обратимся к разобранному ранее числовому примеру и сделаем еще одно упрощение: будем считать, что вторая фирма имеет точно такую же функцию затрат, что и первая. Тогда и функция реакции второй фирмы будет иметь вид (5), и для равновесных объемов мы имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 20 - \frac{1}{3}Q_2; \\ Q_2 &= 20 - \frac{1}{3}Q_1. \end{aligned}\right\}$$

На рис. 3 линии реакции обеих фирм построены в координатах Q_1, Q_2. Точка пересечения этих линий соответствует равновесию Курно: $Q_1 = Q_2 = 15$.

В поисках равновесия

Могут ли фирмы, действуя порознь, рассчитать равновесие Курно подобно тому, как это было сделано в численном примере? Для этого каждая из них должна была бы знать не только свою функцию реак-

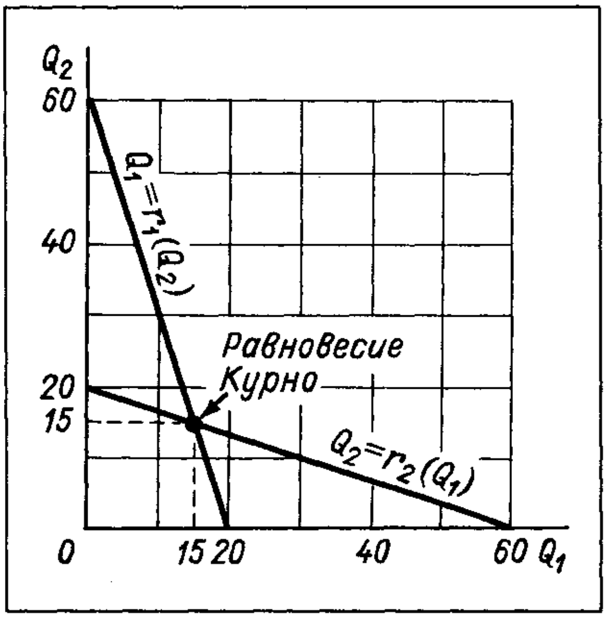

Рис. 3. Кривые реакции обеих фирм и равновесие Курно.

ции, но и аналогичную функцию конкурента, что в свою очередь потребовало бы информации о его функции затрат. Но такое допущение слишком далеко от реальности.

Скорее всего, положение равновесия могло бы быть найдено в процессе «нащупывания». Для описания этого процесса нам понадобится динамическая модель, имеющая много общего с паутинообразной моделью, которая была рассмотрена в лекции 9.

Будем считать, что в момент $t = 0$ фирмы выпускают продукт в объемах Q_1^0 и Q_2^0. В последующие периоды каждая из фирм узнаёт, сколько продукта выпустил на рынок конкурент, и устанавливает свой объем выпуска в соответствии со своей функцией реакции:

$$Q_1^t = r_1(Q_2^{t-1}); \quad Q_2^t = r_2(Q_1^{t-1}).$$

Продолжим числовой пример. Допустим, что начальные значения выпуска обеих фирм сильно отличались от равновесных:

$$Q_1^0 = 45; \quad Q_2^0 = 30.$$

Тогда в следующем периоде первая фирма выпустит

$$Q_1^1 = 20 - \frac{30}{3} = 10 \text{ единиц,}$$

а вторая —

$$Q_2^1 = 20 - \frac{45}{3} = 5 \text{ единиц.}$$

Затем

$$Q_1^2 = 20 - \frac{5}{3} \approx 18.33; \quad Q_2^2 = 20 - \frac{10}{3} \approx 16.67$$

и т. д. Несколько начальных значений Q_1^t и Q_2^t приведены в табл. 2. Видно, что объемы выпуска сходятся к равновесным значениям $Q_1 = Q_2 = 15$.

Можно доказать, что в дуополии с линейными функциями спроса и предельных затрат описанный здесь процесс «нащупывания» при любых значениях параметров сходится к равновесию Курно.

Таблица 2

«Нащупывание» равновесия

t	Q_1^t	Q_2^t
0	45.00	30.00
1	10.00	5.00
2	18.33	16.67
3	14.44	13.89
4	15.37	15.19
5	14.94	14.88
6	15.04	15.02

Сговор

Если фирмы, вместо того чтобы конкурировать друг с другом, будут принимать свои решения совместно, то вместе они смогут выступать на рынке как монополия и тем самым смогут извлечь наибольшую прибыль, достижимую при данных функциях спроса и затрат. Распределив между собой максимальную прибыль, они могут добиться того, что каждая фирма извлечет из такого совместного решения бóльшую выгоду, чем из любого другого.

Снова обратимся к нашему числовому примеру. Поскольку мы приняли функции затрат обеих фирм одинаковыми, совокупный объем производства (Q) должен быть разделен между фирмами поровну,[1] $Q_1 = Q_2 = Q/2$, и общие затраты объединения описываются функцией

$$TC = 2\left[600 + 80\frac{Q}{2} + \left(\frac{Q}{2}\right)^2\right] = 1200 + 80Q + \frac{1}{2}Q^2,$$

а предельные затраты —

$$MC = 80 + Q.$$

[1] Если функции затрат фирм различны, то задача распределения между ними совокупного объема и определения общих затрат объединения становится довольно громоздкой (см. лекцию 26).

Так как предельная выручка для объединения $MR = 200 - 4Q$, оптимальный совокупный объем производства определяется уравнением

$$200 - 4Q = 80 + Q,$$

откуда $Q = 24$, и оптимальные объемы выпуска каждой из фирм равны $Q_1 = Q_2 = 12$.

Убедимся в том, что согласованное решение приносит фирмам бо́льшую прибыль, чем равновесное.

При равновесии Курно затраты каждой из фирм

$$TC_1 = TC_2 = 600 + 80 \cdot 15 + 15^2 = 2025,$$

и на рынке установится цена

$$P = 200 - 2(15 + 15) = 140.$$

Выручка каждой фирмы

$$TR_1 = TR_2 = 15 \cdot 140 = 2100,$$

а прибыль

$$\Pi_1 = \Pi_2 = 2100 - 2025 = 75.$$

При согласованном решении соответственно

$$TC_1 = TC_2 = 600 + 80 \cdot 12 + 12^2 = 1704;$$

$$P = 200 - 2 \cdot 24 = 152; \quad TR_1 = TR_2 = 12 \cdot 152 = 1824;$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = 1824 - 1704 = 120.$$

Заметим, что *точка согласованного оптимума не является равновесной.* Если одна из фирм, выполняя условия сговора, будет производить 12 единиц продукта, то для другой, как показывает равенство (5), наиболее выгодно производить 20 - 12/3 = 16 единиц. С похожей ситуацией мы столкнулись раньше, при обсуждении «дилеммы заключенного».

Для удобства сопоставления ситуаций будем считать, что каждая из фирм решает, производить ли ей продукт в «объеме Курно» (15 единиц) или в «объеме сговора» (12 единиц). Для заполнения таблицы, подобной табл. 1, нам нужно вычислить прибыль каждой из фирм, если одна из них (например, первая) производит объем Курно, а другая — «объем сговора»:

$$TC_1 = 2025; \quad TC_2 = 1704; \quad P = 200 - 2(15 + 12) = 146;$$

$$TR_1 = 15 \cdot 146 = 2190; \quad TR_2 = 12 \cdot 146 = 1752,$$

так что

$$\Pi_1 = 2190 - 2025 = 165; \quad \Pi_2 = 1752 - 1704 = 48.$$

Результаты сведены в табл. 3, в каждой клетке которой слева показана прибыль первой фирмы, справа — второй.

Таблица 3

Прибыли фирмы

Выбор первой фирмы	Выбор второй фирмы	
	$Q_2=15$	$Q_2=12$
$Q_1 = 15$	75, 75	165, 48
$Q_1 = 12$	48, 165	120, 120

Таким образом, для того чтобы сговор состоялся, каждой фирме нужны твердые гарантии того, что партнер по сделке будет выполнять ее условия.

Олигополия с произвольным числом фирм

Модель дуополии обладает большой наглядностью, но определение равновесия Курно легко обобщается на случай олигополии с произвольным числом фирм. Пусть Q_i — объем продукта i-й фирмы. $Q = \sum_i Q_i$ — совокупный объем продукта всех фирм. Введем в рассмотрение также величины $Q_i^- = Q - Q_i$ — объем продукта всех фирм, кроме i-й. Тогда цена спроса $P = P_D(Q)$ с точки зрения i-й фирмы может быть представлена в виде $P = P_D(Q_i + Q_i^-)$, т. е. кривая условного спроса для i-й фирмы получается из кривой рыночного спроса сдвигом влево на Q_i^- единиц. Других отличий построение функции реакции $Q_i = r_i(Q_i^-)$ от случая дуополии не имеет.

Равновесие Курно определяется решением системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = r_1(\qquad Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_{n-1} + Q_n); \\ Q_2 = r_2(Q_1 \qquad + Q_3 + \ldots + Q_{n-1} + Q_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n = r_n(Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_{n-1} \qquad). \end{array}\right\}$$

Если все фирмы одинаковы, то при $n \to \infty$ равновесие Курно стремится к равновесию на конкурентном рынке.

Вопрос об устойчивости равновесия Курно в общем случае решается значительно сложнее, чем для дуополии. При большом числе фирм условия устойчивости равновесия Курно в пределе совпадают с условием устойчивости паутинообразной модели (см. лекцию 9).