Математическое приложение

Выбор в условиях риска

1. Понятие риска

Принимая то или иное решение, экономический субъект не всегда в состоянии однозначно оценить его последствия. Например, если он вкладывает деньги в определенное предприятие, он рассчитывает на получение в будущем некоторого потока доходов. Однако ситуация может сложиться таким образом, что поток доходов будет отклоняться от ожидаемого. В таких случаях говорят, что субъект рискует, что риск может оправдаться, а может и не оправдаться и т. д.

Следует заметить, что не всякая неоднозначность последствий принимаемого решения связывается с риском. Различаются ситуации *риска* и *неопределенности*. Ситуация риска имеет место, если последствия носят *случайный* характер, т. е. характеризуются не только набором возможных значений, но и *вероятностью* каждого из них. Если же известно лишь множество возможных исходов, но им нельзя приписать никаких значений вероятностей, то ситуация характеризуется как неопределенная. Здесь мы будем рассматривать только ситуации риска.

В разделе 3 лекции 14 рассматривался вопрос о предпочтениях субъекта при случайной полезности приобретаемого набора благ. Выяснилось, что в ситуациях риска порядковая концепция полезности недостаточна для описания рационального поведения субъекта и необходима количественная мера полезности. Из системы аксиом, предложенной Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном [1], следует существование такой функции полезности, к максимизации математического ожидания которой стремится субъект. Эта функция полезности индивидуальна и определена с точностью до единицы измерения и начала отсчета.

Наиболее существенные решения, принимаемые субъектом в условиях риска, связаны не с покупкой тех или иных потребительских благ, а с различными финансовыми операциями — сбережением денег, покупкой и продажей ценных бумаг, страхованием и т. д. Имея в виду это обстоятельство, для того чтобы упростить анализ поведения потребителя, мы не будем здесь рассматривать выбор конкретных благ со случайными свойствами, а ограничимся обсуждением выбора среди альтернатив, каждая из которых приносит потребителю денежный доход, величина которого случайна (изменяет размер его богатства случайным образом).

С другой стороны, преимущественная сфера приложения теории хозяйственного риска — финансовые операции — имеет дело с решениями, последствия которых проявляются в более или менее отдаленном будущем и состоят в разновременном образовании тех или иных выигрышей или потерь. В связи с этим учет риска обычно связывается с дисконтированием случайных денежных потоков. Поскольку в настоящем приложении нас интересует выбор в условиях риска сам по себе, мы, чтобы не усложнять изложения, будем считать, что последствия принятого решения наступают сразу после его принятия, что позволит оставить в стороне вопросы дисконтирования.

2. Полезность богатства

Вопрос о полезности богатства в связи с выбором в условиях риска рассматривался еще Д. Бернулли [2] в статье, заложившей начало современному пониманию этой проблемы.

Под *богатством* индивида обычно понимают суммарную ценность его имущества. Другое определение богатства связывает его величину с дисконтированным потоком доходов индивида. Это определение не противоречит первому: ценность любого актива и есть дисконтированный поток будущих доходов, приносимых этим активом (см. лекцию 38). Но оно расширяет представление об «имуществе», позволяя включить в состав богатства, в частности, человеческий капитал. Заметим, что именно в этом смысле понимал богатство (состояние) Бернулли: «...под состоянием я понимаю здесь все то, что может дать пищу, одежду, удобства, даже роскошь и возможность удовлетворять какие-либо желания. <...> Для большинства людей основную часть их состояния составляет их работоспособность, которая включает в себя также и способность к попрошайничеству<...>» [2, с.13].

При фиксированных ценах денежному доходу индивида можно приписать полезность как максимальную полезность потребительских благ, которые он может приобрести, располагая данным доходом. Таким образом, полезность денежного дохода — косвенная, производная от полезности благ. В свою очередь полезность богатства производна по отношению к полезности дохода; в конечном счете она определяется полезностью потребительских благ.

Покажем, что индивид, сталкиваясь с риском, не стремится максимизировать математическое ожидание своего богатства. Для этого мы рассмотрим пример выбора, случайный характер последствий которого особенно очевиден, — выбора, связанного со страхованием.

Допустим, что некий петербургский купец закупил в Амстердаме товары, которые он может продать в Петербурге за 10 тыс. р. (Сюжет заимствован из статьи Д. Бернулли). Купец отправляет товары морским путем. Будем считать, что после оплаты перевозки у него осталось еще 5 тыс. р. и больше никакого имущества у него нет. Известно, что из сотни судов, отправляющихся в это время года из Амстердама в Петербург, обычно пять погибают. Иными словами, с вероятностью 0.05 груз погибнет, а с вероятностью 0.95 — благополучно доплывет до цели. Купец решает вопрос: страховать или не страховать груз?

Страхование — сделка между страхователем и страховщиком. Страховщик тоже решает вопрос: заключать ему договор с купцом или нет?

Решение каждого из участников сделки зависит от цены страхования. Обозначим через z размер страхового платежа (все денежные суммы — в тыс. руб.).

Если купец откажется от страхования, то в благоприятном случае он будет располагать в Петербурге имуществом на сумму $10 + 5 = 15$ тыс. р., а в неблагоприятном лишь 5 тыс. Если же он застрахует груз, то после внесения страхового платежа размер его имущества составит $15 - z$. Столько у него останется в благоприятном случае и ровно столько же — в неблагоприятном: он получит страховое возмещение размером 10 тыс. р., и всего у него будет $(5 - z) + 10 = 15 - z$ (табл. 1).

Таблица 1

Имущество купца в различных ситуациях (тыс. руб.)

Случай	Без страхования	При страховании
Благоприятный	15	$15 - z$
Неблагоприятный	5	$15 - z$

Математическое ожидание величины имущества без страхования равно $0.95{\cdot}15 + 0.05{\cdot}5 = 14.5$ тыс. р. Если имущество застраховано, то величина его не случайна и равна $15 - z$. Если считать, что купец предпочитает вариант, сулящий большее математическое ожидание величины его имущества, то он примет решение страховать груз, если окажется $15 - z > 14.5$, или $z < 0.5$.

Обратим теперь наше внимание на страховщика. Если сделка не состоится, то при любом исходе плавания он получит нулевой доход. Если же он заключит договор с купцом, то в благоприятном случае его доход составит z, а в неблагоприятном — $z - 10$ (табл. 2).

Таблица 2

Доход страховщика в различных ситуациях (тыс. руб.)

Случай	Без страхования	При страховании
Благоприятный	0	z
Неблагоприятный	0	$z - 10$

Математическое ожидание дохода при страховании равно $0.95z+0.05 \times (z - 10) = z - 0.5$; страховщику выгодно заключить договор с купцом, если эта величина больше нуля, т. е. при условии $z > 0.5$.

Мы видим, что сделка не может состояться ни при какой величине страхового платежа: условия, выгодные для купца, невыгодны для страховщика, и наоборот. Лишь при значении $z = 0.5$ никто из них ничего не выигрывает и не проигрывает. Но это утверждение справедливо лишь в предположении об отсутствии трансакционных затрат: мы не учли затрат на поиски партнера, на заключение сделки, на контроль за выполнением ее условий, на кассовые операции и т. п. Если бы мы их учли, оказалось бы, что по крайней мере один из участников проигрывает от сделки, а не выигрывает никто.

Итак, предположив, что субъекты выбирают вариант, дающий наибольшее математическое ожидание денежного дохода или размера имущества, мы пришли к выводу о невозможности страхования. Но страхование все-таки существует. Следовательно, предположение было ложным.

Иными словами, полезность богатства, математическое ожидание которой стремится максимизировать субъект (*полезность по фон Нейману—Моргенштерну*), не совпадает с величиной богатства. Легко убедиться, что результаты будут теми же, если считать полезность пропорциональной величине богатства или отличающейся от нее на постоянную величину. Пусть w — богатство субъекта, $u(w)$ — функция полезности богатства. Из сказанного выше следует, что функция полезности $u(w)$ в общем случае не может быть линейной.

На рис. 1 представлен график вогнутой функции полезности (для иллюстрации взята функция $u(w) = \sqrt{w}$). Допустим, что индивид может выбрать вариант поведения, в результате которого его богатство с равными вероятностями примет значение 1 или 49 ед.; математическое ожидание богатства

$$\mathbf{M}[w] = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 49 = 25.$$

Допустим также, что индивид может выбрать другой, безрисковый вариант поведения, который наверняка приведет его к уровню богатства 25 ед. Если бы индивид стремился максимизировать богатство, то оба варианта были бы для него равноценны. Но у нашего индивида система предпочтений другая. Полезности различных исходов при выборе рискового варианта равны $u(1) = 1$ и $u(49) = 7$, и *ожидаемая полезность* (математическое ожидание полезности) составляет

$$\mathbf{M}[u] = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 7 = 4.$$

Полезность безрискового варианта равна $\sqrt{25} = 5$, так что безрисковый вариант для данного индивида оказывается более предпочтительным, чем рисковый с тем же самым математическим ожиданием богатства. Данному рисковому варианту эквивалентен по полезности такой безрисковый вариант поведения, который позволяет достичь уровня богатства $w_e = 4^2 = 16$ ед.

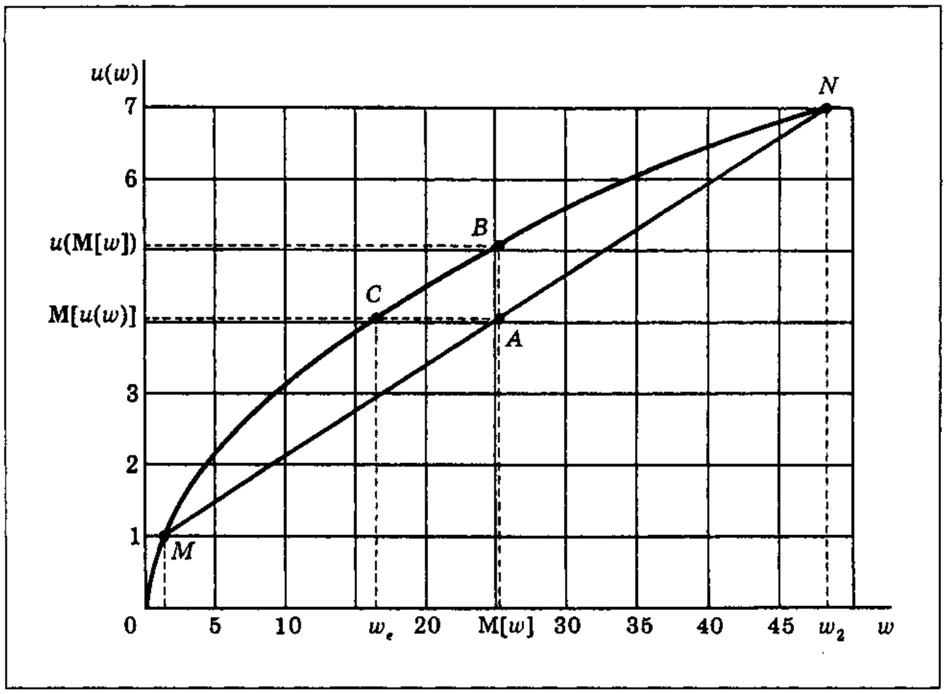

Рис. 1. Функция полезности богатства индивида, не склонного к риску. Функция полезности вогнута (хорда MN расположена ниже дуги $MCBN$). Вследствие этого $\mathbf{M}[u(w)] < u(\mathbf{M}[w])$. Безрисковый уровень богатства $w_e = 16$ эквивалентен по полезности случайному уровню с $\mathbf{M}[w] = 25$.

Функции полезности, различающиеся только выбором начала отсчета и единицы измерения, описывают одну и ту же систему предпочтений в отношении рискового выбора. Рассмотрим функции $u(w)$ и $v(w) = a + bu(w)$, $b > 0$. В силу известного свойства математического ожидания[1]

$$\mathbf{M}[v(w)] = \mathbf{M}[a + bu(w)] = a + b\mathbf{M}[u(w)],$$

и поэтому тот из сравниваемых вариантов, которому соответствует бо́льшее значение $\mathbf{M}[u(w)]$, характеризуется также бо́льшим значением $\mathbf{M}[v(w)]$, а это и значит, что обе функции полезности представляют одно и то же отношение предпочтения.

Справедливо также обратное утверждение: если функции $u(w)$ и $v(w)$ описывают одно и то же отношение предпочтения в отношении рискового выбора, то выполняется равенство $v(w) = a + bu(w)$, причем $b > 0$.

[1] Здесь и далее мы используем свойство математического ожидания, состоящее в том, что для любой случайной величины X и любых чисел a и b выполняется равенство $\mathbf{M}[a + bX] = a + b\mathbf{M}[X]$.

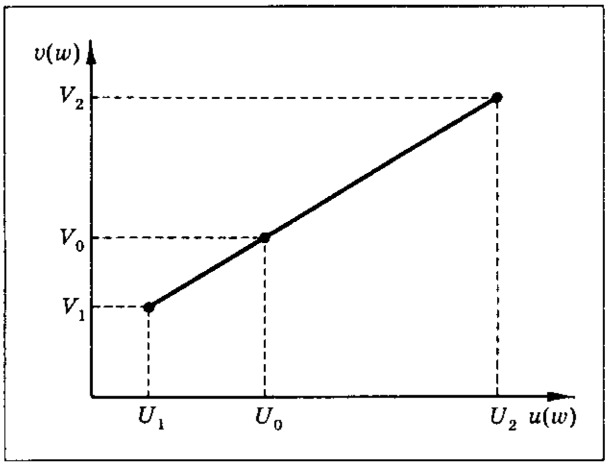

Рис. 2. Зависимость между функциями полезности, представляющими одну и ту же систему предпочтений индивида.

Пусть при данной системе предпочтений безрисковый вариант w_0 равноценен рисковому варианту с исходами w_1 и w_2 и соответствующими вероятностями p_1 и p_2 ($p_1 + p_2 = 1$). Обозначим

$$U_0 = u(w_0), \quad U_1 = u(w_1), \quad U_2 = u(w_2),$$

$$V_0 = v(w_0), \quad V_1 = v(w_1), \quad V_2 = v(w_2).$$

Одинаковость системы предпочтений означает, что

$$\mathbf{M}[u(w)] = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) = u(w_0),$$

$$\mathbf{M}[v(w)] = p_1 v(w_1) + p_2 v(w_2) = v(w_0),$$

или

$$p_1U_1 + p_2U_2 = U_0, \quad p_1V_1 + p_2V_2 = V_0.$$

В векторной записи последние равенства могут быть объединены:

$$(U_0, V_0) = p_1(U_1, V_1) + p_2(U_2, V_2),$$

т. е. точка (U_0, V_0) лежит на отрезке, соединяющем точки (U_1, V_1) и (U_2, V_2). Но все три точки лежат на графике зависимости v от u (рис. 2). Так как обе функции должны одинаково оценивать *любые* рисковые варианты, все приведенные соотношения должны выполняться при произвольных значениях w_1, w_2 и произвольных вероятностях, т. е. график должен быть прямой линией, описываемой равенством $v = a + bu$. Так как $u(w)$ и $v(w)$ — возрастающие функции, $b > 0$.

3. Рискофобы, рискофилы, рисконейтралы

Индивиды, для которых безрисковый вариант поведения предпочтительнее рискового с тем же самым математическим ожиданием достигаемого богатства, называются *не склонными к риску* (или *рискофобами*). Соответственно индивиды с противоположным характером предпочтений называются *склонными к риску* (или *рискофилами*). Наконец, индивиды, для которых равноценны варианты поведения с одинаковыми математическими ожиданиями богатства, называются *нейтральными по отношению к риску*.

Покажем, что несклонность к риску индивида, о котором шла речь в предыдущем примере, следует из вогнутости его функции полезности. Мы видим, что одинаковые по абсолютной величине отклонения случайных уровней дохода от математического ожидания (−24 и +24) вызывают неодинаковые отклонения полезности (−4 и +2). А вогнутые функции характеризуются убыванием производной с ростом аргумента, так что равные приращения аргумента в области бóльших значений влекут за собой меньшие приращения функции.

Свойства выпуклых (а следовательно, и вогнутых) функций рассматривались нами в Математическом приложении «Выпуклые множества и функции» (вып. 1). Одно из них применительно к вогнутым функциям сводится к следующему. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — произвольные значения аргумента вогнутой функции $f(x)$, числа λ_1, λ_2, ..., λ_n — неотрицательны, в сумме равны единице, а в остальном произвольны. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right),$$

причем приведенное неравенство можно заменить строгим, если функция $f(x)$ строго вогнута, значения аргумента различны и хотя бы два из чисел λ_i отличны от нуля.

Если x_1, x_2, ... , x_n — значения *случайной* величины X, которым соответствуют вероятности λ_1, λ_2, ..., λ_n, то суммы в левой и правой частях неравенства представляют собой математические ожидания, так что само неравенство может быть переписано в виде

$$\mathbf{M}[f(X)] \le f(\mathbf{M}[X])$$

(это свойство вогнутых функций получило название *неравенства Йенсена*).

Пусть теперь $u(w)$ — возрастающая строго вогнутая функция полезности богатства индивида и $\mathbf{M}[w] = w^*$. Если богатство индивида представляет собой невырожденную случайную величину,[2] то в соответствии с неравенством Йенсена

$$\mathbf{M}[u(w)] < u(w^*).$$

Иными словами, ожидаемая полезность случайного богатства меньше, чем полезность безрискового уровня богатства, равного математическому ожиданию случайного богатства, а это и есть принятое нами определение рискофобии.

Итак, индивид не склонен к риску, если его функция полезности богатства строго вогнута. Если же его функция полезности строго выпукла, то он склонен к риску (рис. 3). В этом нетрудно убедиться, проведя рассуждения, аналогичные приведенным выше. Наконец, если функция полезности индивида линейна, то

$$\mathbf{M}[u(w)] = \mathbf{M}[a + bw] = a + b\ \mathbf{M}[w] = u(\mathbf{M}[w]),$$

и индивид рисконейтрален.

---

[2] Случайная величина называется *вырожденной*, если она принимает единственное значение с вероятностью 1 (на все остальные значения приходится суммарная вероятность 0). В противном случае она называется невырожденной.

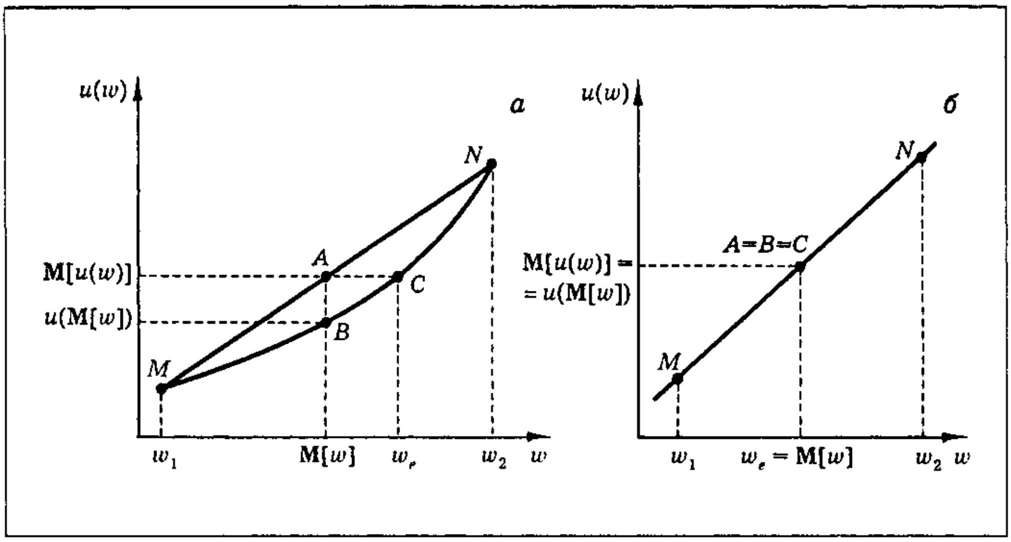

Рис. 3. Функции полезности богатства индивидов, склонного к риску (*а*) и нейтрального (*б*).
а — функция полезности выпукла (хорда *MN* расположена выше дуги *MBCN*); вследствие этого $\mathbf{M}[u(w)] < u(\mathbf{M}[w])$, $w_e > \mathbf{M}[w]$; *б* — функция полезности линейна (хорда и дуга совпадают), $\mathbf{M}[u(w)] = u(\mathbf{M}[w])$, $w_e = \mathbf{M}[w]$.

В предыдущем пункте мы рассмотрели пример со страхованием купцом груза и пришли к парадоксальному выводу о невозможности взаимовыгодного страхования. Вывод следовал из допущения, что и купец, и страхователь считали предпочтительным для себя вариант поведения, ведущий к более высокому ожидаемому уровню богатства. В терминах настоящего пункта это означает, что мы считали обоих участников предполагаемой сделки нейтральными по отношению к риску.

Посмотрим, как изменится вывод, если мы будем считать участников сделки рискофобами. Допустим, что оба имеют одну и ту же функцию полезности богатства $u(w) = \sqrt{w}$. В этом случае ожидаемая полезность для купца в случае отказа от страхования равна $U_0 = 0.95\sqrt{15} + 0.05\sqrt{5} = 3.7911$, а в случае страхования равна $U_1 = \sqrt{15 - z}$. Он предпочтет страхование, если $U_1 > U_0$, т. е. если $\sqrt{15 - z} >$ >3.7911. Решая неравенство, находим, что страхование будет выгодным для купца при страховом взносе $z < 15 - 3.7911^2$, или

$$z < 0.6273.$$

Итак, купец готов застраховать свой груз не только при страховом взносе, меньшем математического ожидания ущерба (0.5), но и при несколько большем взносе.

Для того чтобы найти условие выгодности сделки для страховщика, нам нужно знать величину его богатства. Пусть она составляет 10 000 тыс. р.; полезность при отказе от договора составляет

$\sqrt{10000} = 100$. В случае заключения договора она равна $0.95\sqrt{10000 + z} + 0.05\sqrt{10000 - 10 + z}$, и договор выгоден для страховщика, если эта величина превышает 100. Опуская выкладки, приведем окончательный результат: страховщик готов заключить договор с купцом, если

$$z > 0.5001.$$

(Заметим, что для «богатого» страховщика эффект рискофобии ничтожно мал). Итак, отказавшись от предположения о нейтральности обоих субъектов в пользу предположения об их несклонности к риску, мы пришли к заключению о существовании интервала значений страхового взноса $0.5001 < z < 0.6273$, в пределах которого сделка выгодна для обоих участников. Какова в действительности будет плата за страхование, зависит от конкретных обстоятельств рынка страховых услуг.

Выше мы выделили типы отношения индивида к риску в зависимости от знака выпуклости функции полезности богатства или, иначе, в зависимости от того, возрастает или убывает предельная полезность — производная $u'(w)$. Но характер изменения $u'(w)$ может быть различным на разных участках. Исследуя такие разные формы поведения людей, связанного с риском, как страхование, участие в азартных играх и лотереях и т. д., М. Фридмен и Л. Сэвидж [3] пришли к выводу, что теория ожидаемой полезности фон Неймана—Моргенштерна совместима с такими, казалось бы, противоречащими ей фактами, как желание одних и тех же людей страховать свое имущество (несклонность к риску) и участвовать в лотереях (склонность к риску). Рис. 4 иллюстрирует характер функции полезности таких индивидов. При значениях w, близких к величине имеющегося в распоряжении индивида богатства (w_0), функция полезности вогнута, индивид стремится избежать риска и изъявляет готовность застраховаться. В то же время при существенно более высоких уровнях богатства

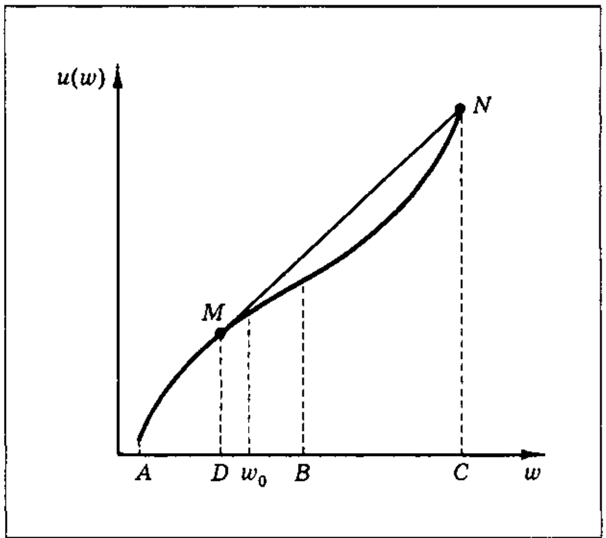

Рис. 4. Функции полезности богатства индивида, обнаруживающего признаки противоположного отношения к риску.

На участке AB, содержащем достигнутый уровень богатства, функция полезности вогнута, индивид склонен к страхованию имущества. На участке BC функция выпукла. Хорда MN расположена выше соответствующей дуги, и за небольшую плату (Dw_0) индивид готов участвовать в лотерее, сулящей крупный выигрыш (DC).

функция полезности выпукла, и индивид согласен за небольшую цену принять участие в лотерее, сулящей крупный выигрыш, при том, что вероятность выигрыша ничтожна (хорда MN расположена выше стягиваемой ею дуги).

Наблюдения над финансовыми рынками показывают, что преобладающий тип поведения их участников характерен для рискофобов и проявляется в повышенной цене вложений, связанных с риском. Рассмотрим кредитора, предоставляющего ссуду в 1 тыс. р. на год при безрисковой годовой процентной ставке 10 %. Допустим, что вероятность невозврата денег составляет 0.1. Ясно, что процент за такой кредит будет больше 10 % при любом отношении кредитора к риску: при существующей возможности предоставления безрисковой ссуды рисконейтральный кредитор предоставил бы ссуду с данным уровнем риска по процентной ставке r, удовлетворяющей равенству

$$0.1 \cdot 0 + 0.9 \cdot 1 \cdot (1 + r) = 1 \cdot (1 + 0.1),$$

так что $r = 1.1/(0.9 - 1) \cong 0.222$, или 22.2 %. Кредитор-рискофил предоставил бы ссуду под меньший процент (но все-таки превышающий 10 %), а рискофоб — под более высокий процент (в конце приложения мы рассмотрим, под какой именно). Таким образом, само по себе превышение рисковой процентной ставки над безрисковой не свидетельствует о рискофобии кредитора. Но складывающиеся на финансовых рынках цены, отражающие предпочтения многих участников рынка, характерны именно для рискофобии как преобладающего типа.

В то же время в различных разделах экономической теории часто приходится анализировать поведение индивидов в условиях случайности и рассматривать такие эффекты, которые не зависят от отношения индивидов к риску. В этих случаях анализ существенно упрощается в предположении об их рисконейтральности.

4. Безрисковый эквивалент и премия за риск

Отдельный акт выбора в условиях риска связан с получением случайного *выигрыша*, т. е. приращения богатства, вызванного принятым решением. В дальнейшем, говоря о выигрыше, мы будем иметь в виду *чистый выигрыш*, который может быть как положительным, так и отрицательным. Если w_0 обозначает богатство индивида в момент принятия решения, а w — богатство, складывающееся в результате реализации последствий его выбора, то выигрыш есть разность

$$g = w - w_0.$$

Выигрыш, добавленный (с учетом знака) к начальному уровню богатства, формирует его окончательный уровень.

Вернемся к примеру с функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$. Допустим, что начальный уровень богатства субъекта $w_0 = 10$ и что ему нужно выбрать между двумя вариантами действий, один из которых дает гарантированный выигрыш в 15 ед., а другой — случайный выигрыш с равновероятными значениями −9 и +39. По существу это та же самая ситуация, которую мы рассмотрели в п. 2, только теперь мы разделяем начальный уровень богатства и выигрыш, получаемый в результате решения. Заметим, что гарантированный выигрыш в 15 ед. равен математическому ожиданию случайного выигрыша:

$$0.5(-9) + 0.5\cdot 39 = 15.$$

Выбирая вариант со случайным выигрышем, как мы видели, индивид получил бы ожидаемую полезность богатства 4 ед. Такую же полезность имело бы богатство $4^2 = 16$ ед., а достичь этого уровня индивид мог бы, выбрав вариант с гарантированным выигрышем 6 ед. Таким образом, для индивида безрисковый выигрыш в 6 ед. *эквивалентен* рассматриваемому случайному выигрышу (безрисковый выигрыш в 15 ед., разумеется, предпочтительнее).

Безрисковым эквивалентом случайного выигрыша называется гарантированный выигрыш, приводящий к полезности богатства, равной ожидаемой полезности случайного выигрыша. Используя обозначения G для случайного выигрыша и g_e — для его безрискового эквивалента, мы можем это определение выразить равенством:

$$u(w_0 + g_e) = \mathbf{M}[u(w_0 + G)].$$

Из неравенства Йенсена следует, что для рискофоба

$$u(w_0 + g_e) = \mathbf{M}[u(w_0 + G)] < u(\mathbf{M}[w_0 + G]) = u(w_0 + \mathbf{M}[G]),$$

а так как функция полезности — возрастающая, то можно утверждать, что для рискофоба $g_e < \mathbf{M}[G]$ — безрисковый эквивалент случайного выигрыша меньше его математического ожидания. Для рискофила справедливо противоположное неравенство, а для индивида, индифферентного к риску, безрисковый эквивалент и математическое ожидание выигрыша совпадают.

В тех случаях, когда математическое ожидание выигрыша равно нулю, безрисковый эквивалент для рискофоба отрицателен, для рискофила — положителен, для рисконейтрала — равен нулю.

Оценки риска индивидом могут быть связаны с теми операциями, которые он предполагает совершить с источником риска. Индивид может либо продать случайный выигрыш, либо купить его — в обмен на некоторую денежную сумму (или другой безрисковый актив).

Минимальная цена, за которую индивид согласен продать случайный выигрыш Y, называется *ценой продавца* (asking price, P_a). Эта величина представляет собой приращение богатства, приносящее ту же полезность, что и ожидаемая полезность случайного выигрыша:

$$u(w_0 + P_a) = \mathbf{M}[u\ (w_0 + Y)].$$

Из этого определения следует, что цена продавца равна безрисковому эквиваленту выигрыша ($P_a = y_e$), и поэтому для рискофоба $P_a < \mathbf{M}[Y]$. Разность между ожидаемым выигрышем и ценой продавца получила название *рисковой премии*, или *премии за риск* (по оценке продавца):

$$R_a = \mathbf{M}[Y] - P_a.$$

Допустим, что индивид располагает начальным богатством $w_0 = 25$ и рисковым активом, который с равными вероятностями может принести выигрыш в 10 ед. или не принести никакого выигрыша ($\mathbf{M}[Y] = 5$). По-прежнему будем считать, что функция полезности индивида $u(w) = \sqrt{w}$. Минимальная цена P_a, за которую он согласен продать этот актив, определяется равенством

$$\sqrt{25 + P_a} = 0.5\sqrt{25} + 0.5\sqrt{25 + 10},$$

откуда $P_a = 4.790$; рисковая премия $R_a = 5 - 4.790 = 0.210$.

По-иному определяется рисковая премия, если индивид оценивает возможность покупки рискового актива. Индивид согласится купить случайный выигрыш Y, если его ожидаемая полезность с учетом платы не ниже полезности начального богатства. Максимальная цена, за которую индивид согласен купить случайный выигрыш Y, называется *ценой покупателя* (bid price, P_b) и определяется выражением

$$u(w_0) = \mathbf{M}[u\ (w_0 + Y - P_b)].$$

Введем обозначение $G = Y - P_b$ для чистого выигрыша. Из приведенного определения следует, что цена покупателя обращает в нуль безрисковый эквивалент чистого выигрыша ($g_e = 0$), так что для рискофоба $\mathbf{M}[G] = \mathbf{M}[Y] - P_b > 0$. Превышение ожидаемого выигрыша над ценой покупателя также получило название рисковой премии (на сей раз — по оценке покупателя):

$$R_b = \mathbf{M}[Y] - P_b.$$

Если при условиях предыдущего примера индивид, располагающий богатством 25 ед., предполагает купить рисковый актив, то максимальная цена, P_b, должна удовлетворять условию

$$\sqrt{25} = 0.5\sqrt{25 - P_a} + 0.5\sqrt{25 + 10 - P_a},$$

откуда $P_b = 4.75$, $R_b = 5 - 4.75 = 0.25$.

Обратимся снова к рассмотренному ранее примеру со страхованием груза. Можно заметить, что примененные здесь понятия покупки и продажи случайного выигрыша противоположны понятиям покупки и продажи страховых услуг. В используемых здесь терминах купец выступает продавцом отрицательного выигрыша, а страховщик — покупателем. Если сравнить приведенные здесь выражения с рассуждениями предыдущего пункта, то легко увидеть, что плата за страхование, приемлемая для купца, — это взятая с обратным знаком цена продавца, а приемлемая для страховщика — цена покупателя, также с обратным знаком. Ожидаемый выигрыш в обоих случаях равнялся −0.5. Рисковые премии для купца и страховщика равны соответственно

$$R_a = -0.5 - (-0.6273) = 0.1273, \quad R_b = -0.5 - (-0.5001) = 0.0001.$$

Применительно к конкретным операциям используются и другие понятия рисковой премии (пример — в п. 7).

5. Спрос на рисковый актив

В этом и следующем пунктах мы ограничимся рассмотрением выбора, производимого не склонным к риску индивидом. Он решает приобрести актив определенного вида (например, некоторое количество определенных ценных бумаг). Актив приобретается по цене c за единицу, а обладание единицей актива дает его владельцу право на выигрыш G^*, который мы будем считать случайной величиной. Чистый выигрыш при этом составляет $G = G^* - c$ на единицу. Покупая x единиц, индивид платит cx и получает право на выигрыш G^*x, так что чистый выигрыш составит Gx. Выясним, сколько единиц актива он купит.

Прежде всего заметим, что он захочет купить ценные бумаги только в том случае, если математическое ожидание чистого выигрыша положительно. Если бы оно было отрицательно или равно нулю, безрисковый эквивалент (для рискофоба он меньше математического ожидания) был бы заведомо отрицательным, и приобретение актива в любом положительном количестве вело бы к потере полезности. С другой стороны, если чистый выигрыш при любом исходе принимает неотрицательные значения, то полезность заведомо тем больше, чем большее количество актива приобретет индивид, и он захочет вложить в его покупку все свое богатство.

Итак, будем считать, что $\mathbf{M}[G] > 0$, и, следовательно, при любом положительном x выполняется соотношение $\mathbf{M}[Gx] = x\mathbf{M}[G] > 0$. Кроме того, примем, что среди возможных значений чистого выигрыша g_i имеются отрицательные. При малом x кривизна функции полезности, как отмечалось выше, сказывается слабо, и безрисковый эквивалент также положителен, так что покупка бумаг повысит полезность индивида. С увеличением x эффект рискофобии будет сказываться все заметнее, и при достаточно больших значениях x безрисковый эквивалент выигрыша за счет влияния отрицательных выигрышей начнет убывать, а следовательно, начнет убывать и полезность. Иными словами, можно полагать, что при некотором значении x не склонный к риску индивид получит максимальную полезность. Именно это количество бумаг он и захочет приобрести.

Приведенные соображения носят предположительный характер, однако можно доказать, что при не слишком ограничительных условиях задача определения спроса рискофоба на рисковый актив

$$\mathbf{M}[u(w_0 + Gx)] \to \max$$

имеет ненулевое решение.

Рассмотрим пример. Индивид с функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$ и начальным уровнем богатства 10 ед. приобретает актив по цене $c = 1$. В случае неудачи актив не принесет никакого дохода, а в случае удачи выигрыш составит 2 ед. на каждую единицу актива. Вероятности неудачи и удачи равны соответственно $^1/_3$ и $^2/_3$. С учетом платы за актив чистые выигрыши при неудаче и удаче равны −1 и 1 на единицу актива. Математическое ожидание выигрыша, как видим, положительно: $^1/_3 \cdot (-1) + {}^2/_3 \cdot 1 = {}^1/_3 > 0$. Задача определения спроса принимает следующий конкретный вид:

$$\mathbf{M}[u(w_0 + Gx)] = \frac{1}{3} \cdot (10 - x)^{1/2} + \frac{2}{3} \cdot (10 + x)^{1/2} \to \max.$$

Приравняем нулю производную от ожидаемой полезности:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{M}[u(w_0 + Gx)] = -\frac{1}{6} \cdot (10 - x)^{-1/2} + \frac{2}{6} \cdot (10 + x)^{-1/2} = 0\,.$$

Так как максимизируемая функция — вогнутая, выполнение этого равенства есть достаточное условие максимума. Из последнего равенства находим $x = 6$.

Если вероятность благоприятного исхода выше, то актив привлекательнее для индивида. Если, например, вероятности неудачи и удачи положить равными соответственно $^1/_4$ и $^3/_4$, то при сохранении остальных условий предыдущего примера найдем, что теперь объем спроса на актив $x = 8$.

6. Меры Эрроу—Пратта

Мы считаем функцию полезности богатства индивида возрастающей, причем для рискофоба она вогнута. Иными словами, предельная полезность $u'(w)$ для него положительна и убывает с ростом богатства. Естественно считать, что скорость убывания предельной полезности может служить характеристикой степени неприятия риска. Считая функцию полезности дважды дифференцируемой, скорость убывания предельной полезности можно определить как взятую с обратным знаком вторую производную функции полезности: $-u''(w)$. На этой основе строятся показатели неприятия риска — меры Эрроу—Пратта.

Абсолютной мерой Эрроу—Пратта называется функция

$$\mathrm{AP_A}(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Как отмечалось, функции полезности, связанные друг с другом возрастающей линейной зависимостью $v(w) = a + bu(w)$, $b > 0$, описывают одну и ту же систему предпочтений субъекта. Так как $v'(w) = bu'(w)$ и $v''(w) = bu''(w)$, абсолютные меры Эрроу—Пратта для функций $u(w)$ и $v(w)$ совпадают; это позволяет утверждать, что мера Эрроу–Пратта выражает свойства предпочтений индивида, а не представляющей их функции полезности. То же относится и к *относительной мере Эрроу—Пратта:*

$$\mathrm{AP_R}(w) = w\ \mathrm{AP_A}(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Эти наименования — «абсолютная» и «относительная» — на первый взгляд могут вызвать недоумение. Их целесообразность проясняется при анализе размерностей. Если мы измеряем полезность в ютилах, а богатство — в рублях, то первая производная полезности имеет размерность ютил/руб., вторая производная — ютил/руб.^{2}, так что величина $\mathrm{AP_A}$ имеет размерность 1/руб. Если мы перейдем от измерения богатства в рублях к измерению в копейках, то величина $\mathrm{AP_A}$ уменьшится в 100 раз. Величина $\mathrm{AP_R}$ — безразмерная. Если представить ее в виде

$$\mathrm{AP_R}(w) = -\frac{w}{u'}\cdot\frac{du'}{dw},$$

то можно интерпретировать эту величину как взятую с обратным знаком эластичность предельной полезности по богатству: $\mathrm{AP_R}(w) = -\mathrm{E}_w[u']$.

Если субъект склонен к риску, то обе меры Эрроу—Пратта для него отрицательны, а если нейтрален, то равны нулю.

Меры Эрроу—Пратта являются полезным инструментом анализа поведения индивида в условиях риска. Справедливы следующие теоремы (приводим их без доказательства).[3]

1. Если $\mathrm{AP_A}(w)$ — возрастающая функция, то с увеличением богатства безрисковый эквивалент случайного выигрыша убывает, и наоборот.

2. Если $\mathrm{AP_A}(w)$ возрастает, то с увеличением богатства спрос на рисковый актив убывает (т. е. рисковый актив — низшее благо), а если $\mathrm{AP_A}(w)$ — убывающая функция, то с увеличением богатства спрос на рисковый актив возрастает (т. е. рисковый актив — нормальное благо).

3. Если $\mathrm{AP_A}(w)$ убывает, а $\mathrm{AP_R}(w)$ возрастает, то эластичность спроса на рисковый актив по богатству меньше единицы (т. е. рисковый ак-

[3] Доказательство утверждений, аналогичных теоремам 2 и 3, можно найти в книге [4]; аналог теоремы 1 приведен там же в качестве упражнения для самостоятельного доказательства.

тив — необходимое благо), а если $AP_R(w)$ убывает, то эластичность больше единицы (т. е. рисковый актив — роскошное благо).

В теории особый интерес представляют такие функции полезности, для которых абсолютная или относительная мера Эрроу—Пратта является константой. Приводимые ниже функции могут быть умножены на любой положительный коэффициент, или к ним может быть прибавлена любая константа без изменения их свойств как характеристик предпочтений субъекта.

Абсолютная мера Эрроу—Пратта постоянна для функции полезности вида

$$u(w) = -e^{-cw}$$

(знак минус делает функцию возрастающей и вогнутой). Действительно, $u'(w) = ce^{-cw}$, $u''(w) = -c^2e^{-cw}$, так что $AP_A(w) = c$.

Относительная мера Эрроу—Пратта постоянна для функций[4]

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}; \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{1}$$

$$u(w) = \log w \tag{2}$$

(делитель $1 - \alpha$ в формуле (1) делает функцию $u(w)$ возрастающей и вогнутой как при $\alpha > 1$, так и при $\alpha < 1$).

Для функции (1) $AP_R(w) = \alpha$, для функции (2) $AP_R(w) = 1$ (доказать эти утверждения предоставляется читателю в качестве упражнения). Функция (2) может рассматриваться как предельный случай функции полезности[5] при $\alpha \to 1$.

Функция полезности $u(w) = \sqrt{w}$, к которой мы много раз обращались, имеет постоянную относительную меру Эрроу—Пратта $AP_R = 0.5$. Как и для любой другой функции полезности с постоянной относительной мерой Эрроу—Пратта, для нее абсолютная мера Эрроу—Пратта убывает ($AP_A(w) = \alpha/w$). Для индивида с такой функцией полезности безрисковый эквивалент с ростом богатства возрастает. Именно поэтому купец в рассмотренном примере смог договориться со страховщиком, имеющим ту же самую функцию полезности: «бедный» купец за уклонение

---

[4] В лекции 44 функции (1) рассматриваются как функции полезности общества, «не склонного» к дифференциации доходов, и параметр α используется как характеристика неприятия неравенства при построении индекса Аткинсона; в той же роли может использоваться и функция (2) для $\alpha = 1$.

[5] Функция (1) не имеет предела при $\alpha \to 1$, функция (2) является пределом функции

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

отличающейся от функции (1) постоянным слагаемым $-1/(1-\alpha)$, что для функции полезности несущественно.

от риска готов был заплатить больше, чем требовал «богатый» страховщик за принятие риска на себя.

Рисковый актив для такого индивида представляет собой нормальное благо, причем, как это следует из теоремы 3, эластичность спроса по богатству равна единице, т. е. объем спроса пропорционален величине богатства. В этом можно убедиться непосредственно. Действительно, задача выбора в этом случае имеет вид

$$\mathbf{M}[u(w_0 + Gx)] = \mathbf{M}[k(w_0 + Gx)^{1-\alpha}] \rightarrow \max,$$

где $k = 1/(1 - \alpha)$. Введем обозначение $z = x/w_0$ для относительного объема спроса, так что $x = w_0 z$, и вынесем постоянные множители за знак математического ожидания:

$$kw_0^{1-\alpha} = \mathbf{M}[(1 + Gz)^{1-\alpha}] \rightarrow \max.$$

Последнее выражение показывает, что положение максимума определяется величиной z. Пусть максимум достигается при $z = z^*$; тогда оптимальное значение объема покупки $x = z^* w_0$, т. е. спрос на рисковый актив пропорционален величине богатства.

7. Пример : процентная ставка по ненадежному займу

Рассмотрим кредитора, который располагает богатством w_0 и может предоставить заем размером l на определенный период (скажем, на один год). Если известно, что заемщик вернет долг наверняка, то он готов дать заем под процентную ставку i. Выясним, на каких условиях он согласен дать деньги взаймы, если заемщик не вполне надежен и с вероятностью p долга не вернет.

В случае абсолютно надежного займа богатство кредитора после возврата денег с процентами составит $w_0 - l + (1 + i)\cdot l = w_0 + il$. Предоставив ненадежный заем под процент r, он с вероятностью p получит чистый выигрыш $-l$ и с вероятностью $(1 - p)$ — чистый выигрыш rl. Он сочтет сделку выгодной для себя, если ожидаемая полезность такого выигрыша больше полезности безрискового варианта. Минимальная рисковая процентная ставка, при которой сделка будет для него приемлемой, определяется равенством

$$u(w_0 + il) = p\,u(w_0 - l) + (1 - p)\,u(w_0 + rl).$$

Иными словами, процентный доход по надежному займу должен быть безрисковым эквивалентом «случайного выигрыша» — дохода по ненадежному займу.

Для кредитора, нейтрального к риску $[u(w) = w]$, процентная ставка по ненадежному займу не зависит от его богатства и равна

$$r_0 = \frac{1+i}{1-p} - 1.$$

Но для кредитора-рискофоба при такой ставке безрисковый эквивалент окажется меньше $i \cdot l$, и чтобы заинтересовать его в сделке, ставка должна быть повышена, и тем значительнее, чем больше его стремление избежать риска. Если его устраивает процентная ставка r, то разность $r - r_0$ представляет собой *рисковую премию в составе процентной ставки*.

Выше, в п. 3, мы уже рассматривали этот вопрос на числовом примере, где заем в 1 тыс. р. предоставлялся под 10 % годовых, а вероятность невозврата долга составляла 0.1. Для нейтрального кредитора мы получили ставку $r_0 = 22.2$ %.

Пусть теперь кредитор располагает богатством 5 тыс. р.; его несклонность к риску характеризуется относительной мерой Эрроу—Пратта $\alpha = 0.5$, которую будем считать постоянной. В этом случае рисковую процентную ставку найдем из равенства

$$5.1^{0.5} = 0.1 \cdot 4^{0.5} + 0.9(5 + r)^{0.5}.$$

Отсюда $r \approx 0.23$, или 23 %. Рисковая премия составляет 23 − 22.2 = = 0.8 %. Заметим, что некоторые авторы в качестве рисковой премии рассматривают превышение рисковой процентной ставки над безрисковой $(r - i)$, т. е. в нашем случае 23 − 10 = 13 %. Однако из этой величины 12.2 % не связанны с собственно риском, а только покрывают средние (ожидаемые) потери от невозврата ссуды.

Рассмотрим теперь кредитора, имеющего такое же богатство, но более нетерпимого к риску. Пусть для него $\alpha = 1$, т. е. $u(w) = \ln w$. Рисковая процентная ставка определяется равенством

$$\ln 5.1 = 0.1 \cdot \ln 4 + 0.9 \cdot \ln(5 + r),$$

откуда $r \approx 24$ %, и рисковая премия равна 1.8 %.

Для кредитора с еще большим неприятием риска, $\alpha = 2$, т. е. $u(w) = = 1/w$, должно выполняться равенство

$$\frac{1}{5.1} = \frac{0.1}{4} + \frac{0.9}{5 + r},$$

так что $r \approx 26.1$ %, и теперь рисковая премия составляет 3.9 %. Как видим, чем больше мера Эрроу—Пратта, тем бóльшую премию требует кредитор.

На финансовом рынке действуют агенты и с различным отношением к риску, и с различным уровнем богатства; кроме того, они располагают различной информацией — и о потенциальных партнерах, и о хозяйственной среде, в которой всем им приходится действовать, а потому они по-разному оценивают вероятности тех или иных событий. Помимо этого, они предпринимают различные меры для снижения риска: страхуют сделки, покупают комбинации различных активов, риски которых обусловлены действием независимых или противоположно влияющих факторов и т. д. Цена на финансовом рынке сложится под влиянием всех этих (и многих других) обстоятельств.

Литература

1. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of games and economic behaviour. 2nd ed. Princeton, 1947. — Рус. пер.: *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.
2. *Bernoulli D.* Specimen theoriae novae de mensura sortis // Commentarii academiae scientarium imperialis Petropolitanae. Petropoli, 1738. T. V. P. 175—192. — Рус. пер.: *Бернулли Д.* Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 11—27. (Вехи экономической мысли; Вып. 1).
3. *Friedman M., Savage L. J.* The utility analysis of choices involving risk // J. Pol. Econ. 1948. Vol. 56, N 4. P. 279—304. — Рус. пер.: *Фридмен М., Сэвидж Л. Дж.* Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск // Теория потребительского поведения и спроса. С. 208—249.
4. *Huang C., Litzenberger R. H.* Foundations for financial economics. New York etc., 1988. 365 p.

Выпуклость множества производственных возможностей

1. Множество производственных возможностей и его граница

Множество производственных возможностей фирмы или общества можно рассматривать с различных точек зрения. В лекции 22 рассматривалась фирма, причем для простоты предполагалось, что фирма производит единственный продукт. В этой связи использовалось множество производственных возможностей в $(n+1)$-мерном пространстве, n координат которого характеризовали затраты различных ресурсов, а одна координата — объем выпуска продукта. В этом выпуске в связи с иным характером обсуждаемых задач мы рассматриваем *множество производственных возможностей* (МПВ), или *производственное множество* общества в пространстве *продуктов*, которое мы будем обозначать символом $\mathcal{P}$.

При более общем подходе рассматривается МПВ в пространстве благ, часть которых производится данной производственной системой (продукты), а другая часть потребляется в процессе производства (ресурсы). Продуктам системы приписываются положительные значения координат, потребляемым ресурсам — отрицательные. Рис. 1 иллюстрирует МПВ для случая двух благ, одно из которых является ресурсом, а другое — продуктом. Такого рода представление производственных возможностей будем называть *производственным множеством в пространстве «ресурсы—продукты»*. Рис. 1,*а* соответствует обратимому производственному процес-