или противоположно влияющих факторов и т. д. Цена на финансовом рынке сложится под влиянием всех этих (и многих других) обстоятельств.

Литература

1. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of games and economic behaviour. 2nd ed. Princeton, 1947. — Рус. пер.: *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.
2. *Bernoulli D.* Specimen theoriae novae de mensura sortis // Commentarii academiae scientarium imperialis Petropolitanae. Petropoli, 1738. T. V. P. 175—192. — Рус. пер.: *Бернулли Д.* Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 11—27. (Вехи экономической мысли; Вып. 1).
3. *Friedman M., Savage L. J.* The utility analysis of choices involving risk // J. Pol. Econ. 1948. Vol. 56, N 4. P. 279—304. — Рус. пер.: *Фридмен М., Сэвидж Л. Дж.* Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск // Теория потребительского поведения и спроса. С. 208—249.
4. *Huang C., Litzenberger R. H.* Foundations for financial economics. New York etc., 1988. 365 p.

Выпуклость множества производственных возможностей

1. Множество производственных возможностей и его граница

Множество производственных возможностей фирмы или общества можно рассматривать с различных точек зрения. В лекции 22 рассматривалась фирма, причем для простоты предполагалось, что фирма производит единственный продукт. В этой связи использовалось множество производственных возможностей в $(n+1)$-мерном пространстве, n координат которого характеризовали затраты различных ресурсов, а одна координата — объем выпуска продукта. В этом выпуске в связи с иным характером обсуждаемых задач мы рассматриваем *множество производственных возможностей* (МПВ), или *производственное множество* общества в пространстве *продуктов*, которое мы будем обозначать символом $\mathscr{P}$.

При более общем подходе рассматривается МПВ в пространстве благ, часть которых производится данной производственной системой (продукты), а другая часть потребляется в процессе производства (ресурсы). Продуктам системы приписываются положительные значения координат, потребляемым ресурсам — отрицательные. Рис. 1 иллюстрирует МПВ для случая двух благ, одно из которых является ресурсом, а другое — продуктом. Такого рода представление производственных возможностей будем называть *производственным множеством в пространстве «ресурсы—продукты»*. Рис. 1,*а* соответствует обратимому производственному процес-

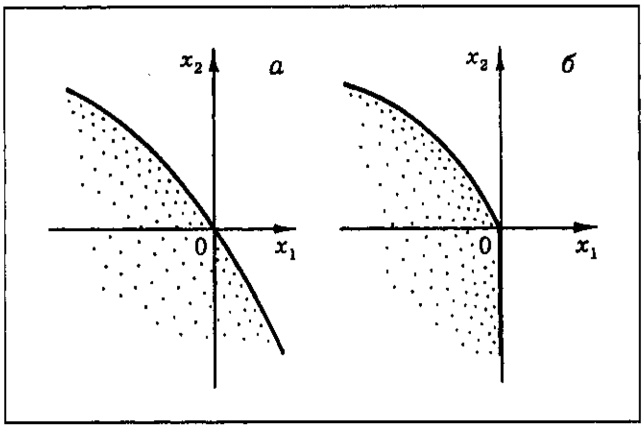

Рис. 1. Производственная функция обратимого (*а*) и необратимого (*б*) процессов в пространстве «ресурсы—продукты».

су, в котором любое из благ может быть продуктом (другое при этом будет ресурсом). Примером может служить гидроаккумулирующая электростанция, включенная в энергосеть: в «обычном» режиме она производит электроэнергию, используя механическую энергию воды; если же в сети имеется избыточная электроэнергия, генератор электростанции работает как электродвигатель, а турбина — как насос, перекачивающий воду из нижнего бьефа в верхний. В последнем случае электроэнергия используется как ресурс, а механическая (потенциальная) энергия — как продукт. Однако производственные процессы в большинстве своем необратимы. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 1,*б*, где x_1 — затраты ресурса (со знаком минус), а x_2 — производство продукта. В этом случае интерес представляет лишь та часть графика, которая лежит в квадранте II. Она отличается от рис. 1 к лекции 22 лишь знаком координаты x_1.

МПВ в пространстве «ресурсы—продукты» обычно считается неограниченным: производственная система может выпустить какое угодно количество любого продукта, если будет располагать достаточным для этого количеством ресурсов. В отличие от этого МПВ общества в пространстве *продуктов* ограничено доступным количеством ресурсов.

Итак, здесь под МПВ мы будем понимать совокупность наборов продуктов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые общество может произвести, располагая доступными для использования ресурсами и используя существующие технологии. Набор $\mathbf{x}$ будем называть *эффективным*, если среди возможных наборов не существует отличного от $\mathbf{x}$ набора $\mathbf{y}$, такого, что $y_1 \geq x_1$, $y_2 \geq x_2$, ..., $y_n \geq x_n$ (такое соотношение между векторами будем записывать как $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$).

Будем считать все продукты неограниченно делимыми и примем допущение о *возможной неэффективности*[1]: если вектор $\mathbf{x}$ принадлежит МПВ, то в этом множестве найдется также *любой* вектор $\mathbf{z}$, такой, что $\mathbf{x} \geq \mathbf{z}$, т. е. если можно из имеющихся ресурсов произвести набор продуктов $\mathbf{x}$, то можно также произвести любой набор $\mathbf{z}$, в котором каждого продукта не больше, чем в наборе $\mathbf{x}$. Иными словами, мы исключаем ситуацию, представленную на рис. 2,*а*: здесь не все точки, лежащие левее и ниже точки $\mathbf{x}$, принадлежат МПВ. На рис. 2,*б* через эффективную точку $\mathbf{x}$ множества производственных возможностей

[1] В англоязычной литературе это допущение получило название *free disposal*, что можно перевести как — допущение о свободной ликвидации.

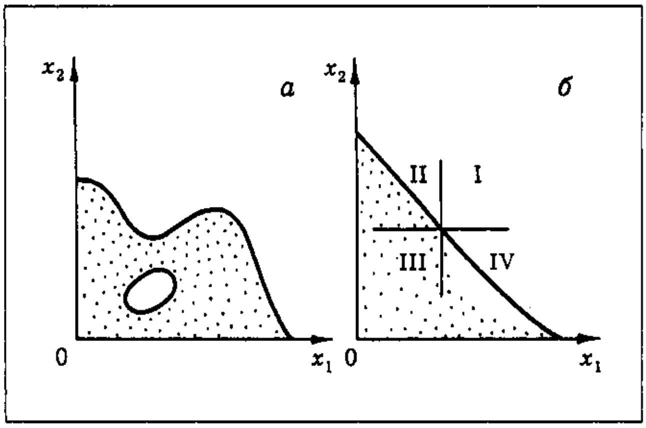

Рис. 2. Гипотеза о возможной неэффективности.
а — нарушение гипотезы; *б* — выполнение гипотезы.

проведены прямые, параллельные координатным осям и делящие плоскость на 4 квадранта. Внутренние точки квадранта I недоступны, квадранта III — неэффективны. Граница МПВ (или, короче, *граница производственных возможностей*, ГПВ) составлена из эффективных точек и имеет отрицательный наклон: при движении вдоль границы увеличение одной из координат неизбежно сопровождается уменьшением другой. В пространстве любой размерности при движении в пределах ГПВ увеличение одних координат должно сопровождаться уменьшением других.

Будем использовать следующие упрощенные определения. Точку некоторого множества называют *внутренней*, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью. Точка называется *внешней*, если она имеет некоторую окрестность, ни одна точка которой не принадлежит рассматриваемому множеству. Наконец, точка называется *граничной*, если *любая* ее окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему. В общем случае граничные точки множества могут как содержаться, так и не содержаться в нем. Например, множество вещественных чисел, удовлетворяющих условию $1 \le x < 2$, содержит граничную точку $x = 1$ и не содержит точку $x = 2$. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*. Мы будем считать, что МПВ является замкнутым.

Все эффективные точки МПВ являются граничными: любая окрестность эффективной точки содержит хотя бы одну недостижимую точку (в силу определения одновременное увеличение объемов всех продуктов невозможно) и хотя бы одну достижимую (в силу гипотезы о возможной неэффективности). Предположение о замкнутости МПВ означает, что эффективные точки считаются достижимыми.

В случае двух продуктов ГПВ можно рассматривать как график функции, характеризующей *максимально возможное* количество одного продукта (скажем, x_2) при данном количестве другого (x_1), — *функции трансформации* $x_2 = T(x_1)$; ГПВ называют также *линией трансформации*. Трансформация, или «преобразование», одного продукта в другой по существу означает сокращение выпуска одного продукта и использование высвобождающихся при этом ресурсов для увеличения производства другого продукта. Из допущения о возможной неэффективности следует, что если $x_2 \le T(x_1)$, то точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ принадлежит МПВ. Из этого же допущения следует, что функция трансформации — невозрастающая. *Предельная норма трансформации* определяется как взятая с обратным знаком производная функции трансформации:

$$MRT_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} = -dT\frac{(x_1)}{dx_1}.$$

В пространстве n продуктов ГПВ представляет собой *поверхность трансформации*. Ее можно рассматривать как пространственный график функции, характеризующей максимально возможное количество одного из продуктов (скажем, x_n) при данных количествах всех остальных $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, — *функции трансформации:*

$$x_n = T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = T_n(\mathbf{x}_{-n}).$$

Индекс в обозначении функции трансформации соответствует номеру продукта, максимальное количество которого мы рассматриваем в зависимости от количеств остальных продуктов; обозначение $\mathbf{x}_{-n}$ будем использовать для вектора, получающегося из $\mathbf{x}$ удалением n-й компоненты. Формально функция трансформации может быть определена как

$$T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \max\{x_n \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{P}\},$$

или, короче,

$$T_n(\mathbf{x}_{-n}) = \max\{x_n \mid \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}.$$

В n-мерном пространстве продуктов имеют смысл все n функций трансформации: $T_j(\mathbf{x}_{-j})$, $j = 1, 2, \ldots, n$; для каждой эффективной точки n-мерного МПВ можно определить предельные нормы трансформации

$$MRT_{ij} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial T_j}{\partial x_i},$$

показывающие, на сколько единиц может быть увеличено производство j-того продукта при уменьшении на единицу количества i-того продукта и неизменных количествах всех остальных продуктов.

Упражнения.[2] 1. Сколько существует различных предельных норм трансформации для n продуктов?

2. Как связаны между собой MRT_{ij} и MRT_{ji} в одной и той же эффективной точке? Как связаны между собой MRT_{ij}, MRT_{jk} и MRT_{ik} ?

3*. Как соотносятся понятия *функция трансформации* и *производственная функция*? Что является аналогом предельной нормы трансформации применительно к производственной функции?

2. Гипотеза о выпуклости

Понятие выпуклости в пространстве благ обсуждалось в Математическом приложении «Пространство благ» («ЭШ», вып. 1). Напомним: отрезком, соединяющим точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, называется множество точек вида

[2] Упражнения, отмеченные звездочкой, относятся к материалу, выделенному мелким кеглем.

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; множество называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в нем.

Функция $f(\mathbf{x})$ называется вогнутой, если множество точек, расположенных под ее графиком, выпукло. В аналитической форме это определение сводится к тому, что для любых значений аргумента $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ и любых чисел λ_1, λ_2, удовлетворяющих приведенным выше условиям (в дальнейшем всюду будем предполагать, что коэффициенты λ_1, λ_2 этим условиям удовлетворяют), справедливо неравенство

$$f(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2) \leq \lambda_1 f(\mathbf{x}^1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}^2).$$

В теории часто пользуются допущением о выпуклости МПВ. Рассмотрим вначале смысл этого утверждения, а в следующих пунктах рассмотрим, на каких предположениях оно может основываться.

Выпуклость МПВ означает следующее: если производственная система может произвести наборы продуктов $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, то она может произвести также набор, представляющий собой «смесь» из наборов $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, составленную в любой пропорции. Например, если имеющихся ресурсов достаточно для производства каждого из наборов:

$$\mathbf{x}^1 = (10, 40, 20), \quad \mathbf{x}^2 = (30, 10, 30),$$

то их достаточно также для производства любого из наборов

$$0.2\,\mathbf{x}^1 + 0.8\,\mathbf{x}^2 = (26, 16, 28),$$
$$0.5\,\mathbf{x}^1 + 0.5\,\mathbf{x}^2 = (20, 25, 25),$$
$$0.8\,\mathbf{x}^1 + 0.2\,\mathbf{x}^2 = (14, 34, 22) \text{ и т. д.}$$

Если МПВ выпукло, то функция трансформации — вогнутая, как это следует из определения. При этом безразлично, о какой именно из возможных функций трансформации идет речь: если мы рассматриваем функцию $x_j = T_j(\mathbf{x}_{-j})$, то «под графиком» будут располагаться точки, для которых $x_j \leq T_j(\mathbf{x}_{-j})$.

Справедливо и обратное утверждение: если функция трансформации вогнута, то МПВ выпукло.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in \mathcal{P}$. Это значит, что $x_j^1 \leq T_j(\mathbf{x}_{-j}^1)$, $x_j^2 \leq T_j(\mathbf{x}_{-j}^2)$. Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$, т. е. $\mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2$ при некоторых λ_1, λ_2. В силу вогнутости функции трансформации

$$T_j(\mathbf{z}_{-j}) = T_j(\lambda_1 \mathbf{x}_{-j}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}_{-j}^2) \geq \lambda_1 T_j(\mathbf{x}_{-j}^1) + \lambda_2 T_j(\mathbf{x}_{-j}^2).$$

Но $\lambda_1 T_j(\mathbf{x}_{-j}^1) + \lambda_2 T_j(\mathbf{x}_{-j}^2) \geq \lambda_1 x_j^1 + \lambda_2 x_j^2 = z_j$. Таким образом, $z_j \leq T_j(\mathbf{z}_{-j})$. Рассмотрим точку $\mathbf{z}^*$, отличающуюся от $\mathbf{z}$ только j-той компонентой: $z_j^* = T_j(\mathbf{z}_{-j})$ (рис. 3). Точка $\mathbf{z}^*$ по построению лежит на поверхности трансформации, так что $\mathbf{z}^* \in \mathcal{P}$. Так как $\mathbf{z} \leq \mathbf{z}^*$, то в силу допущения о возможной неэффективности $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$. Итак, любая точка отрезка $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$ принадлежит МПВ, чем и исчерпывается доказательство.

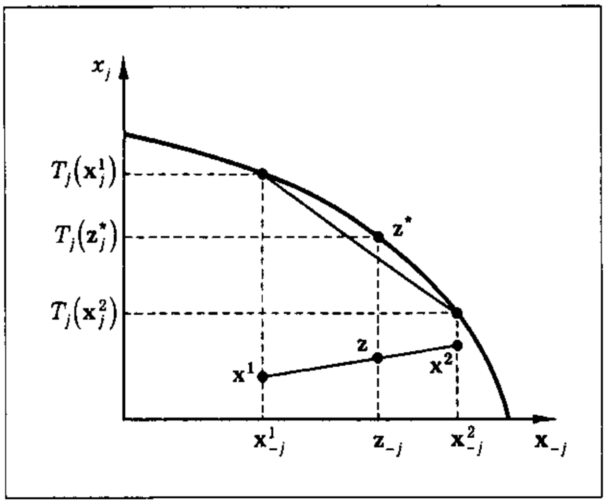

Рис. 3. Связь выпуклости множества производственных возможностей с вогнутостью функции трансформации.
Ось абсцисс условно представляет все координаты, кроме j-той.

Таким образом, утверждения о выпуклости МПВ и о вогнутости функции трансформации равносильны. Попутно отметим, что если какая-либо из функций трансформации является вогнутой, то вогнуты и все остальные.

Вогнутость функции трансформации означает, что ее частные производные (с учетом знака) — невозрастающие функции своих аргументов. Отсюда следует, что предельные нормы трансформации, $MRT_{ij} = -\partial T_j / \partial x_i$, являются неубывающими функциями x_i.

В дальнейшем мы покажем, что утверждение о выпуклости МПВ следует из некоторых элементарных допущений о возможных характеристиках производства.

3. Линейные модели

Начнем с рассмотрения простых моделей. Пусть существует единственный ресурс, ограничивающий производственные возможности рассматриваемого объекта, и пусть R обозначает располагаемое количество этого ресурса. Далее, будем считать, что на производства j-того продукта в количестве x_j необходимо использовать дефицитный ресурс в количестве $c_j x_j$. Множитель c_j будем называть нормой расхода ресурса на j-тый продукт. Если производится n продуктов, то потребное для их производства количество ресурса определяется суммой

$$r = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

и МПВ определяется неравенством $r \le R$, или

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le R$$

(а также, разумеется, условием неотрицательности всех x_j, которое в дальнейшем всюду будет подразумеваться).

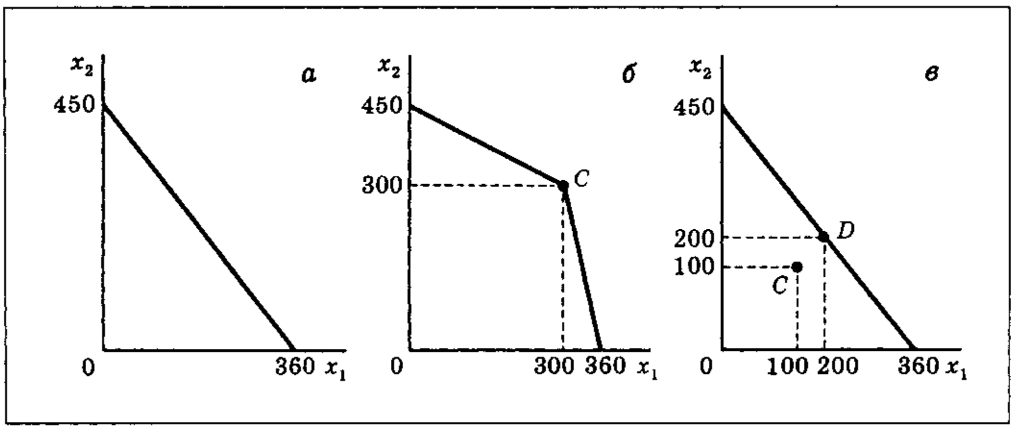

Рис. 4. Независимое производство (*а*), экономия от разнообразия (*б*) и потери от разнообразия (*в*).

Мы по существу задали здесь функцию $r = C(\mathbf{x})$, определяющую количество ресурса, необходимое для производства набора продуктов **x**. Введенная здесь функция линейна: для любых $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ и любых чисел α_1 и α_2 имеет место равенство $C(\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2) = \alpha_1 C(\mathbf{x}^1)+\alpha_2 C(\mathbf{x}^2)$, в чем можно убедиться непосредственно. Если наборы продуктов $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ достижимы, т. е. $r_1 = C(\mathbf{x}^1) \le R$ и $r_2 = C(\mathbf{x}^2) \le R$, то достижим и любой промежуточный набор, $\mathbf{z} = \lambda_1\mathbf{x}^1+\lambda_2\mathbf{x}^2$: его компоненты неотрицательны, а потребное для его производства количество ресурсов

$$r = \lambda_1 C(\mathbf{x}^1) + \lambda_2 C(\mathbf{x}^2) = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$$

удовлетворяет условию $r \le R$. А это означает, что для рассматриваемой модели МПВ выпукло.

На рис. 4,*а* изображено МПВ для двух продуктов, нормы расхода ресурса для которых $c_1 = 5$ и $c_2 = 4$, а располагаемое количество ресурса $R = 1800$. МПВ представляет собой треугольник с вершинами (0, 0), (360, 0) и (0, 450). Треугольник, очевидно, выпуклая фигура.

Заметим, что мы, не оговорив этого, использовали допущение о том, что продукты *взаимно независимы в производстве*: количество ресурса, потребное для производства j-того продукта в количестве x_j, не зависит от того, какие еще продукты производятся и в каких количествах. Вернемся к примеру, изображенному на рис. 4,*а*, и допустим, что наряду с раздельными технологиями производства каждого из продуктов существует также технология их совместного производства. При этом на совместное производство одной единицы 1-го и одной единицы 2-го продукта требуется не 5 + 4 = 9, а лишь 6 ед. ресурса (*экономия от разнообразия*). Скажем, производятся столовые ложки и чайные ложечки, а лимитирующий ресурс — листовой материал, из которого выштамповываются заготовки. Если заготовки чайных ложечек размещаются между заготовками столовых ложек, то отходов значительно меньше, чем при штамповке заготовок каждого вида в отдельности, так что сокращается количество потребляемого материала. Теперь достижимым является набор (300, 300), который был недостижим при раздельных технологиях (точка C на рис. 4,*б*). МПВ в этом случае имеет вид выпуклого четырехугольника, изображенного на рис. 4,*б*.

Упражнение 4. Докажите, что МПВ в рассматриваемом случае выпукло и имеет вид рис. 4,*б*.

Итак, взаимозависимость продуктов в производстве, проявляющаяся в экономии от разнообразия, не нарушает выпуклости МПВ.

Допустим теперь, что совместное производство требует большего количества ресурса, чем при раздельном производстве (*потери от разнообразия*). Скажем, в условиях рассматриваемого примера совместное производство 1 ед. 1-го продукта и 1 ед. 2-го продукта требует не 9, а 12 ед. ресурса. Допустим, что весь ресурс направлен на совместное производство. В этом случае выпуск будет характеризоваться вектором (150, 150) (точка C на рис. 4,*в*). Направив 1000 ед. ресурса на производство первого продукта и 800 — на производство второго, мы получили бы выпуск (200, 200) (точка D), так что совместное производство неэффективно, и существование такой технологии не изменяет конфигурации МПВ. Иными словами, существование совместного производства, характеризующегося потерями от разнообразия, также не нарушает выпуклости МПВ.

Упражнение 5. Для производства 200 кг говядины и 5 кг говяжей печени требуется 1 корова; технологии раздельного производства этих продуктов не существует. Как выглядит МПВ общества, располагающего 1000 коров? Будет ли это множество выпукло?

Обратимся снова к предположению о независимости продуктов и снимем нереалистическое допущение о единственности лимитирующего ресурса. Допустим, что потребляется m ресурсов, располагаемые количества которых обозначим R_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Норму расхода k-того ресурса на единицу j-того продукта обозначим c_{kj}. Тем самым мы определили m функций расхода ресурсов:

$$C_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Теперь МПВ определяется системой линейных неравенств:

$$C_k(\mathbf{x}) \le R_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Каждому из этих неравенств, как мы видели, отвечает выпуклое множество (в случае двух продуктов имеющее вид рис. 4,*а*). Достижимый вектор $\mathbf{x}$ должен удовлетворять всем неравенствам сразу, т. е. должен принадлежать пересечению множеств, описываемых каждым из неравенств. Но пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество. Таким образом, мы приходим к заключению, что для линейной модели затрат МПВ выпукло при любом числе лимитирующих ресурсов.

Пусть производство двух продуктов требует использования четырех ресурсов; данные рассмотренного выше примера относятся к первому из них, так что

$$c_{11}=5, \qquad c_{12}=4, \qquad R_1=1800.$$

Нормы расхода и располагаемые количества остальных ресурсов:

$$c_{21}=0.2, \qquad c_{22}=0.4, \qquad R_2=120,$$
$$c_{31}=2, \qquad c_{32}=0, \qquad R_3=600,$$
$$c_{41}=0, \qquad c_{42}=3, \qquad R_4=1200$$

(третий ресурс используется только при производстве 1-го продукта, а четвертый — только 2-го). На рис. 5 каждому ресурсу соответствует ограничивающая МПВ прямая; штриховка при каждой прямой показывает полуплоскость, недостижимую из-за ограниченности данного ресурса. Недостижимы также отрицательные уровни выпуска, что показывает штриховка при координатных осях. Общая часть всех незаштрихованных полуплоскостей — выпуклый пятиугольник *OABCD* — обозначает МПВ. Заметим, что 4-й ресурс при данных количествах прочих ресурсов фактически не является лимитирующим и не может быть использован полностью — этому препятствует ограниченность количества 2-го ресурса. Но он мог бы стать лимитирующим, если бы 2-го ресурса стало больше.

Линия трансформации представляет собой ломаную, каждое звено которой соответствует полностью используемому (активному) ресурсу, а каждая вершина — переходу от одного активного ресурса к другому. В пределах звена, для которого k-тый ресурс является активным, предельная норма трансформации $MRT_{12}=c_1/c_2$ сохраняет постоянное значение и скачком возрастает при переходе через вершину.

Упражнение 6. Что представляет собой поверхность трансформации, если продуктов больше двух?

Если в рассматриваемой линейной модели вектор **x** достижим

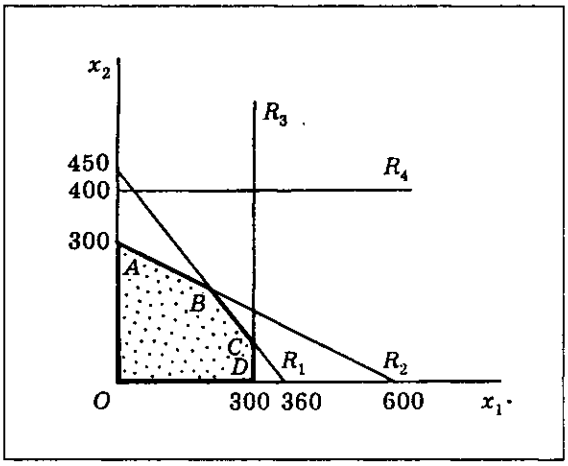

Рис. 5. Линейная модель с двумя продуктами и четырьмя ресурсами.

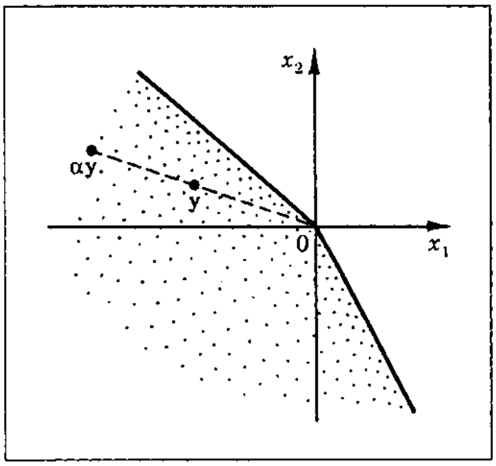

Рис. 6. Конус в пространстве «ресурсы—продукты».

при количествах ресурсов, описываемых вектором $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$, то пропорциональное изменение количества всех ресурсов позволяет пропорционально изменить все компоненты вектора $\mathbf{x}$, сохранив его достижимость: если вектор продуктов $\mathbf{x}$ достижим при векторе ресурсов $\mathbf{R}$, то для любого положительного числа α вектор продуктов $\alpha\mathbf{x}$ достижим при векторе ресурсов $\alpha\mathbf{R}$. Для МПВ в пространстве «ресурсы—продукты» будем использовать обозначение $\mathcal{P}^*$. Из сказанного следует, что для любого объединенного вектора $(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \in \mathcal{P}^*$ и любого $\alpha > 0$ имеет место включение $\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \in \mathcal{P}^*$. Множество в линейном пространстве, обладающее тем свойством, что вместе с любым содержащимся в нем вектором y оно содержит также вектор αy при любом положительном α, называется *конусом* (рис. 6). Таким образом, линейной модели затрат в пространстве «ресурсы—продукты» соответствует конус производственных возможностей.

4. Убывающий предельный продукт

В лекции 22 при обсуждении свойств производственной функции фирмы говорилось о такой закономерности производства, как убывание предельного продукта каждого ресурса. Рассмотрим производство с одним продуктом и одним ресурсом, описывемое производственной функцией $x = f(r)$. Функция затрат ресурса $r = c(x)$ — обратная по отношению к производственной функции, и если предельный продукт $f'(r)$ убывает, то предельные затраты ресурса $c'(x)$ возрастают, так что $c(x)$ — выпуклая функция.

Подобная закономерность имеет место не только для фирмы, но и для общественного производства. Например, при добыче нефти в небольших количествах можно ограничиться легкодоступными месторождениями, так что дополнительная тонна нефти потребует сравнительно небольшого дополнительного количества ресурсов. Большой объем добычи заставляет забираться в Заполярье, бурить скважины в морском дне и т. д., что существенно увеличивает дополнительные затраты на каждую дополнительную тонну.

Рассмотрим теперь производство n продуктов. Необходимое для производства количество ресурса описывается равенством

$$r = C(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j).$$

Если все $c_j(x_j)$ — выпуклые функции, то и $C(\mathbf{x})$ — также выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). МПВ определяется неравеством $C(\mathbf{x}) \le R$. Если наборы продуктов $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ удовлетворяют этому неравенству, то в силу выпуклости функции $C(\mathbf{x})$ имеет место соотношение

$$C(\lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2) \le \lambda_1 C(\mathbf{x}^1) + $$
$$+ \lambda_2 C(\mathbf{x}^2) \le \lambda_1 R + \lambda_2 R = R,$$

так что $\lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2 \in \mathscr{P}$, т. е. МПВ выпукло.

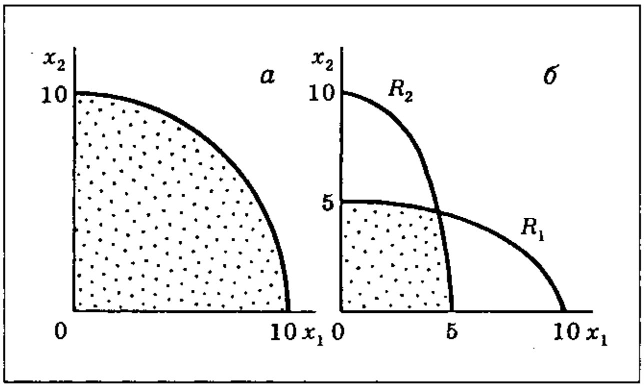

Рис. 7. Множество производственных возможностей при убывающем предельном продукте с одним (*а*) и двумя (*б*) ограничивающими ресурсами.

Рассмотрим пример. Пусть производятся 2 продукта и производственные функции для обоих продуктов одинаковы: $x_1 = \sqrt{r}$ и $x_2 = \sqrt{r}$. Соответственно функции затрат равны $c_1(x_1) = x_1^2$, $c_2(x_2) = x_2^2$. Допустим, что располагаемое количество ресурса $R = 100$. Ресурсное ограничение принимает вид $C(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \le 100$, так что МПВ изображается четвертью круга радиуса 10 с центром в начале координат (рис. 7,*а*). Если при постоянной продуктивности ресурсов функция трансформации была линейной, то в рассматриваемом здесь случае она оказывается строго вогнутой, и при движении вдоль ГПВ слева направо предельная норма трансформации монотонно возрастает.

Поведение предельной нормы трансформации проще всего проанализировать, воспользовавшись полным дифференциалом функции затрат ресурса; на поверхности трансформации объем затрат ресурса равен располагаемому, так что любому перемещению по этой поверхности соответствует нулевое значение дифференциала:

$$dC(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c'(x_j)dx_j = 0.$$

Если нас интересует MRT_{ik}, то мы должны положить равными нулю все dx_j для всех j, кроме $j = i$ и $j = k$. Таким образом, $c_i' \, dx_i + c_k' \, dx_k = 0$, откуда

$$MRT_{ik} = -\frac{dx_k}{dx_i} = \frac{c_i'}{c_k'} = \frac{MP_k}{MP_i},$$

где MP_i, MP_k — предельные продукты рассматриваемого ресурса в производстве i-того и k-того продуктов соответственно. При движении слева направо x_i возрастает, а x_k убывает; MP_i и MP_k ведут себя противоположным образом. Следовательно, при таком движении происходит монотонное возрастание MRT_{ik}.

Итак, если ограничивающим является единственный ресурс, то МПВ выпукло. Если ограничивающими являются несколько различных ресурсов, то, как и в предыдущем пункте, достижимый вектор удовлетворяет одновременно всем ограничениям вида $C_k(\mathbf{x}) \le R_k$, т. е. принадлежит пересечению множеств, определяемых ограничивающими ресурсами. Каждое из этих множеств выпукло, так что выпукло и МПВ. Рис. 7,*б* иллюстрирует случай с двумя продуктами и двумя ресурсами. Ограничения МПВ описываются неравенствами

$$x_1^2 + 4x_2^2 \le 100,$$
$$4x_1^2 + x_2^2 \le 100.$$

Упражнение 7. Каков в данном случае характер изменения предельной нормы трансформации при движении вдоль ГПВ?

5. Модель межотраслевого баланса

Выше рассматривались производственные системы, выпускающие только *конечные* продукты (т. е. продукты, не потребляемые в процессе производства в данной системе) и потребляющие только *внешние* ресурсы (не производимые в данной системе). Если для многих (но не для всех) фирм такое представление производства можно считать удовлетворительным, то для таких систем, как национальное или региональное хозяйство, необходимо учесть, что внутри этих систем производится значительное количество *промежуточных* продуктов, потребляемых этими системами в процессе производства. При этом технология не является однонаправленной: в производстве 1-го продукта может использоваться 2-й и в то же время в производстве 2-го может использоваться 1-й продукт. Так, для производства электроэнергии используется нефть, а для добычи нефти — электроэнергия; для выплавки металла требуется уголь, а для добычи угля нужны машины и инструменты, изготовленные из металла. Кроме того, продукт может требоваться для собственного производства: чтобы вырастить зерно, требуются семена. Таким образом, технологические связи в рассматриваемой системе могут быть весьма сложными. К сказанному следует добавить, что некоторые продукты частично могут потребляться системой в процессе производства, частично — за ее пределами, т. е. такие продукты могут быть и промежуточными, и в то же время конечными продуктами системы.

Рассмотрим вначале систему, производящую единственный продукт и потребляющую единственный внешний ресурс. Например, производится пшеница, а в качестве ресурсов используются пшеница (семена) и земля. Пусть для производства единицы продукции требуется a единиц пшеницы и c единиц земли; для определенности положим $a = 0.5$ и $c = 4$. Для производства единицы *конечной* продукции нужно прежде всего вырастить 1 ед. пшеницы. Но для ее производства нужно потратить (и, следовательно, произвести) 0.5 ед. В свою очередь для производства этих 0.5 ед. необходимо произвести еще $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$, а для их производства требуется еще $0.5 \cdot 0.25 = 0.125$ ед. и т. д. Таким образом, для производства 1 ед. конечной продукции требуется вырастить всего

$$1 + 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + \ldots = 2 \text{ ед.}$$

Если мы рассматриваем статический режим функционирования системы, то мы должны считать, что все циклы производства (0.5, 0.5^2, 0.5^3 ... ед.) совершаются одновременно: выращиваются 2 ед. пшеницы, из которых 1 ед. представляет собой конечную продукцию и 1 ед. остается на семена (чтобы в будущем произвести 2 ед. продукции и тем самым продолжить процесс производства).

Количество земли, необходимое для производства 2 ед. пшеницы (т. е. для 1 ед. конечной продукции), равно $2 \cdot 4 = 8$ ед. Для производства x единиц конечной продукции требуется $r = 8x$ единиц земли. Если в распоряжении производственной системы имеется $R = 200$ ед. земли, то ее производственные возможности определяются неравенством $8x \leq 200$, т. е. МПВ системы представляет собой отрезок $0 \leq x \leq 25$.

Заметим, что если для производства единицы конечного продукта требуется затратить a единиц этого же продукта, то общее количество произведенного продукта y (валовой продукт) и количество конечного продукта x связаны балансовым соотношением

$$y = ay + x,$$

правая часть которого показывает использование произведенного объема: ay единиц используются для производства y единиц, а x представляет собой объем конечного продукта. Решая это уравнение, находим $y = x/(1 - a)$, что согласуется с приведенными выше рассуждениями, так как

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots .$$

Ряд в правой части сходится при $a < 1$, иначе система в процессе производства потребляла бы больше продукта, чем она его производит, и выпуск конечного продукта был бы невозможен. Возможность производства конечного продукта получила название *продуктивности* системы. Для однопродуктовой системы выполнение неравенства $a < 1$ является необходимым и достаточным условием ее продуктивности.

Перейдем теперь к рассмотрению многопродуктовой производственной системы. Общие методы анализа таких систем со сложными производственными связями были разработаны В. Леонтьевым в рамках модели *межотраслевого баланса* (в русскоязычной литературе называемого также *анализом «затраты—выпуск»* — перевод английского термина «input-output analysis»).

Модели межотраслевого баланса получили значительное распространение и в теоретическом анализе, и в практических расчетах. В теории рассматриваются «чистые отрасли», каждая из которых ассоциируется с производством идеально однородного продукта, и число таких отраслей неопределенно велико. В практических приложениях возможности разделения общественного производства на отрасли ограничиваются трудностями получения статистической информации, и поэтому в расчетах оперируют «агрегированными отраслями», производящими такие продукты, как продукция растениеводства, приборостроения, транспортные услуги и т. д.

Мы рассмотрим те элементы модели межотраслевого баланса, которые существенны для рассматриваемого здесь вопроса — выпуклости МПВ.

В основе рассматриваемой ниже модели лежат следующие допущения:

1) каждый продукт может быть как конечным, так и промежуточным, при этом он может использоваться при производстве любого продукта;

2) производство каждого продукта характеризуется жесткой дополняемостью используемых ресурсов;

3) расход каждого ресурса на производство данного продукта пропорционален количеству производимого продукта.

Пусть a_{ij} обозначает расход i-того продукта на производство единицы j-того продукта, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Для вектора конечного продукта будем использовать обозначение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; для вектора валового выпуска — обозначение $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Балансовые соотношения между объемами продуктов представляют собой систему равенств

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Разумеется, не каждый продукт фактически используется в качестве ресурса в производстве всех продуктов, так что некоторые из коэффициентов a_{ij} равны нулю. Более того, некоторые продукты вообще не являются промежуточными. Если i-тый продукт не является промежуточным, то все соответствующие коэффициенты a_{ij} равны нулю и $y_i = x_i$. Некоторые продукты, напротив, выступают только как промежуточные. Валовой объем производства таких продуктов полностью используется в производстве, и для них $x_i = 0$.

Затраты внешних ресурсов связаны с валовыми объемами выпуска продуктов уже известными нам соотношениями

$$r_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

В рамках обсуждаемой модели МПВ представляет собой множество неотрицательных векторов конечных продуктов ($\mathbf{x}$), компоненты которых удовлетворяют балансовым соотношениям (1) при условии, что валовые объемы ($\mathbf{y}$) удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_j \le R_k, \qquad k = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

где R_k, как и ранее, — доступные количества ресурсов.

Покажем, что и в такой модели МПВ выпукло. Пусть векторы конечных продуктов $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ достижимы и им соответствуют векторы валовых продуктов $\mathbf{y}^1$ и $\mathbf{y}^2$. Это значит, что и пара векторов $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$, и пара векторов $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)$ удовлетворяют условиям (1) и (2). Рассмотрим промежуточные векторы:

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2, \qquad \mathbf{y} = \lambda_1\mathbf{y}^1 + \lambda_2\mathbf{y}^2,$$

и непосредственной проверкой убедимся в том, что пара векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также удовлетворяет условиям достижимости:

$$y_i = \lambda_1 y_i^1 + \lambda_2 y_i^2 = \lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^1 + x_i^1\right) + \lambda_2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^2 + x_i^2\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\lambda_1 y_j^1 + \lambda_2 y_j^2\right) + \lambda_1 x_i^1 + \lambda_2 x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + x_i,$$

т. е. условие (1) выполнено, и валовой выпуск $\mathbf{y}$ достаточен для конечного выпуска $\mathbf{x}$. Далее,

$$r_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_j = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\left(\lambda_1 y_j^1 + y_j^2\right) = \lambda_1\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_j^1 + \lambda_2\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_j^2,$$

так что $r_k \le \lambda_1 R_k + \lambda_2 R_k = R_k$, т. е. выполнено условие (2): располагаемое количество ресурсов достаточно для валового выпуска $\mathbf{y}$. Итак, мы показали, что $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$; так как векторы $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ выбраны в пределах МПВ произвольно, а $\mathbf{x}$ — произвольная точка отрезка $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, то тем самым доказана выпуклость МПВ.

В приведенном рассуждении мы молча предполагали, что производственная система продуктивна, т. е. в состоянии производить валовой продукт в количестве, превосходящем его производственное потребление. Для многопродуктовой системы условия продуктивности носят более сложный характер, чем для однопродуктовой. Если, например, производство единицы 1-го продукта требует 2 ед. 2-го продукта, а производство единицы 2-го продукта в свою очередь требует 1.5 ед. 1-го продукта, то в производстве единицы любого из этих продуктов затрачивалось бы по крайней мере 2·1.5 = 3 ед. этого продукта. Такая система, очевидно, непродуктивна. МПВ непродуктивной системы пусто, а пустое множество является выпуклым, так что непродуктивность системы формально не противоречит сделанному ранее выводу.

Читатель, знакомый с матричной алгеброй, может рассмотреть более простое рассуждение. Если **x** и **y** рассматривать как векторы-столбцы, то равенству (1) можно придать вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ — так называемая *матрица прямых затрат* продуктов. На производство конечного продукта **x** непосредственно нужно затратить продукты в количестве $\mathbf{Ax}$, а на производство этих продуктов затратить $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}$ (2-й цикл) и т. д.; во всех циклах для выпуска конечного продукта **x** нужно произвести валовой продукт в количестве

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{Ax} + \mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}^3\mathbf{x} + \ldots = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \ldots)\mathbf{x},$$

где **I** — единичная матрица. Если стоящая в скобках матричная геометрическая прогрессия сходится, то ее сумма равна

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \ldots = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Сходимость этой геометрической прогрессии, как и в однопродуктовом случае, означает продуктивность системы. Вектор валового продукта продуктивной системы связан с вектором конечного продукта соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{Bx} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}. \tag{4}$$

Матрица **B** получила название *матрицы полных затрат* продуктов. Равенство (4) может быть формально выведено непосредственно из балансового соотношения (3): $\mathbf{y} - \mathbf{Ay} = \mathbf{x}$, или $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{x}$; умножая обе части слева на матрицу $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, получим $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}$. Однако это равенство имеет смысл только для продуктивных систем. С матрицей **B** связан сравнительно простой критерий продуктивности: система продуктивна в том и только в том случае, если все элементы матрицы **B** неотрицательны.

Вектор-столбец **r** затрат внешних ресурсов связан с валовым продуктом соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{Cy}$, где $\mathbf{C} = (c_{kj})_{m \times n}$ — матрица прямых затрат ресурсов. Равенство (4) позволяет непосредственно связать потребное количество внешних ресурсов с конечным продуктом: $\mathbf{r} = \mathbf{CBx}$, или $\mathbf{r} = \mathbf{Dx}$, где матрица $\mathbf{D} = \mathbf{CB}$ связывает затраты внешних ресурсов с конечным продуктом. Используя обозначение **R** для вектора располагаемых ресурсов, приходим к явному описанию множества производственных возможностей:

$$\mathbf{Dx} \le \mathbf{R}.$$

Такая система неравенств по существу совпадает с описанием, использованным в п. 3 для линейной модели без промежуточных продуктов.

Здесь была рассмотрена линейная модель межотраслевого баланса. Существуют варианты модели, допускающие наличие нелинейных зависимостей. Если потребности в ресурсах (и внешних, и промежуточных) связаны с объемами выпуска продуктов (и конечных, и промежуточных) выпуклыми зависимостями, т. е. все процессы производства в системе характеризуются невозрастающими предельными продуктами ресурсов, то можно показать, что в этом случае также МПВ оказывается выпуклым.

Рассмотренные нами модели позволяют прийти к заключению, что предположение о выпуклости множества производственных возможностей хорошо согласуется с основными постулатами экономической теории. Разумеется, было бы ошибкой считать, что выпуклость МПВ имеет место абсолютно во всех моделях производственных систем. В частности, выпуклость требует неограниченной делимости всех продуктов. Если хотя бы один из них не отвечает этому требованию, МПВ уже не может быть выпуклым. Но этим и другими подобными обстоятельствами, требующими учета при решении конкретных хозяйственных задач, можно пренебречь на уровне теоретического анализа, тем более тогда, когда объектом анализа является экономика в целом.

Модели конкурентного и неконкурентного поиска ренты

В лекции 50 были кратко и в популярной форме рассмотрены некоторые основные постулаты теории поиска ренты. Целью данной статьи является более углубленное рассмотрение этой теории. В статье последовательно раскрываются модели конкурентного и неконкурентного поиска ренты и связанное с ними полное и неполное растрачивание ренты. Статья предполагает предварительное ознакомление с теорией поиска ренты, изложенной в «Толстой тетради».

Конкурентный поиск ренты

Модель конкурентного поиска ренты впервые была представлена в статье Г. Таллока и развита Р. Познером.[1] Она базируется на ряде допущений.

Во-первых, предполагается, что обретение монополии осуществляется в процессе конкуренции, так что затраты всех фирм на получение монопольного положения в точности равны ожидаемой прибыли от него. В этом заключается суть того, что в теории поиска называется *полным* растрачиванием ренты.

Постулат о полном растрачивании ренты означает, в частности, отсутствие случаев, когда ожидаемая монопольная прибыль превышает суммарную ценность ресурсов, использованных в процессе получения монополии (так называемых инвестиций в поиск ренты). Если такое превышение имеет место, то конкуренция тут же заставит фирмы нанять дополнительные ресурсы в попытках захватить монопольные прибыли.

Во-вторых, предполагается, что в длительном периоде предложение всех задействованных в приобретении монополии ресурсов совершенно эластично, т. е. цены этих ресурсов не включают рентных составляющих.

---

[1] *Tullock G.* The welfare costs of tariffs, monopolies, and theft // West. Econ. J. 1967. Vol. 5. P. 73—79; *Posner R.* The social costs of monopoly and regulation // J. Pol. Econ. 1975. Vol. 83, N 4. P. 807—827.