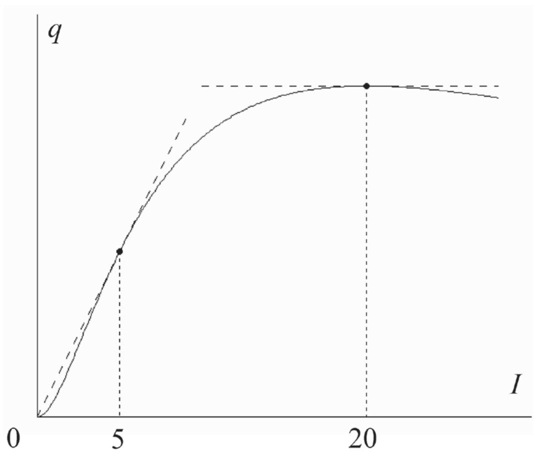
2.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Из графика видно, что с ростом дохода от нуля до некоторого уровня объем потребления товара возрастает, так что благо является нормальным; при дальнейшем росте дохода данный товар вытесняется некоторым заменителем, объем его потребления снижается и товар становится низшим.



Найдем границы области возрастания объема потребления; для этого продифференцируем объем потребления по доходу:

$$\frac{dq}{dI} = 100 \cdot \frac{2I \cdot (I+10)^3 - 3I^2 (I+10)^2}{(I+10)^6} = 100 \cdot \frac{20I - I^2}{(I+10)^4}.$$

Производная обращается в нуль при $I = 20$; при меньших значениях дохода производная положительна, и объем возрастает, при бо́льших — убывает. Таким образом, товар является нормальным при $I < 20$ и низшим — при $I > 20$.

Для того чтобы выяснить, при каких уровнях дохода товар является необходимым благом, а при каких — роскошным, целесообразно воспользоваться эластичностью объема потребления по доходу:

$$\mathsf{E}_I[q] = \frac{I}{q} \cdot \frac{dq}{dI} = \frac{20 - I}{I + 10}.$$

Для роскошного блага эластичность объема потребления по доходу больше единицы. Последнее равенство показывает, что $\mathsf{E}_I[q] > 1$ при $0 < I < 5$. Если $5 < I < 20$, то потребление растет с доходом, но медленнее, чем доход, $\mathsf{E}_I[q] < 1$, и рассматриваемый товар является необходимым благом.

Итак, рассматриваемый товар является низшим благом при $I > 20$ и нормальным — при $I < 20$; при $0 < I < 5$ он является роскошным благом, при $5 < I < 20$ — необходимым.

Комментарии.

1. Знак производной всегда совпадает со знаком эластичности. Поэтому ответы на все вопросы задачи можно было получить, рассматривая диапазоны уровней дохода, в пределах которых значения $\mathsf{E}_I[q]$ превышают единицу, лежат между нулем и единицей и оказываются отрицательными.

2. Современная классификация потребляемых благ берет начало с исследований Э. Энгеля, выполненных в середине XIX в. и, естественно, не использовавших понятия эластичности функций. Проанализировав структуру потребительских бюджетов, Энгель установил, что с ростом дохода сумма расходов на питание возрастает, но их доля в распределении дохода падает. Если мы рассматриваем определенный товар, потребляемый в количестве q и покупаемый по цене p (которую мы считаем здесь неизменной), то расходы равны pq. Доля, приходящаяся на данный товар, равна pq/I; если она с ростом дохода убывает, то $\mathsf{E}_I[pq/I] < 0$. Воспользовавшись свойствами эластичности (см. Приложение) и учитывая неизменность цены, представим это соотношение в виде $\mathsf{E}_I[q] - 1 < 0$, или $\mathsf{E}_I[q] < 1$. При этом абсолютная сумма расходов возрастает, $\mathsf{E}_I[pq] = \mathsf{E}_I[q] > 0$. Таким образом, закон Энгеля применительно к необходимому благу (подобно продуктам питания) формулируется в виде двойного неравенства $0 < \mathsf{E}_I[q] < 1$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Аксиомы потребительских предпочтений:

1) полнота (сопоставимость любых потребительских наборов);

2) транзитивность;

3) ненасыщаемость («больше — лучше, чем меньше», предпочтительность набора, содержащего больший объем любого блага без уменьшения объемов остальных);

4) непрерывность;

5) выпуклость множества наборов, предпочтительных по отношению к любому данному.

Если система предпочтений потребителя задана функцией полезности, то аксиомы 1 и 2 тем самым выполняются. Аксиома 4 выполняется, если функция полезности непрерывна. Во всех вариантах а) — в) функции полезности непрерывны, так что требования аксиом 1, 2 и 4 можно считать выполненными.

Аксиома 3 выполняется, если функция полезности возрастает по каждому аргументу. Функция варианта а), очевидно, удовлетворяет этому требованию, варианта в) — нет, она является убывающей по каждому аргументу. Так как

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy},$$

т. е. значения функций б) и в) — взаимно обратные величины, функция б) является возрастающей (в чем можно убедиться и любым иным способом).

Аксиома 5 требует, чтобы каждая кривая безразличия ограничивала снизу выпуклую область. Это означает, что предельная норма замены MRS_{xy} должна убывать с ростом x и возрастать с ростом y. Функция а) этому требованию не отвечает: соответствующие кривые безразличия — 90-градусные дуги окружностей с центром в начале координат. Для функции б)

$$\partial U / \partial x = \left(\frac{y}{x+y}\right)^2; \qquad \partial U / \partial y = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2,$$

так что

$$\mathrm{MRS}_{\text{xy}} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 .$$

Таким образом, функция б) удовлетворяет всем аксиомам предпочтений.

Ответ:

а) нет; б) да; в) нет.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

Если единица блага x замещается a единицами блага y с сохранением уровня полезности, то единица блага y замещается $1/a$ единицами блага x. Поэтому $\mathrm{MRS}_{yx} = 1/\mathrm{MRS}_{xy}$.

Если к тому же единица блага y замещается b единицами блага z при том же условии, то единица блага x замещается ab единицами блага z и поэтому

$$\mathrm{MRS}_{xy} \cdot \mathrm{MRS}_{yz} = \mathrm{MRS}_{xz}.$$

Это позволяет найти все неизвестные предельные нормы замещения по известным MRS_{xy} и MRS_{xz}.

Комментарий.

Более формализованный подход связывает предельные нормы замены с производными функции полезности:

$$\mathrm{MRS}_{\text{xy}} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} \quad \text{и т. п.},$$

откуда следуют приведенные выше соотношения. Заметим, что система предпочтений определяет функцию полезности неоднозначно: если функция $U(x, y, ...)$ описывает предпочтения данного потребителя, то точно так же их описывает функция $U_1(x, y, ...) = \varphi(U(x, y, ...))$, где φ — произвольная монотонно возрастающая функция. Но

$$\frac{\partial U_1 / \partial x}{\partial U_1 / \partial y} = \frac{(d\varphi / dU) \cdot (\partial U / \partial x)}{d\varphi / dU) \cdot (\partial U / \partial y)} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y},$$

так что отношение частных производных зависит не от количественной шкалы, в которой отображаются полезности, а лишь от предпочтений индивида.

Ответ:
а) 0.5; б) 1.25; в) 0.4; г) 2.5.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

а) Прежде всего, определим предельную норму замены как функцию x и y:

$$U_x = 3x^2y^2; \quad U_y = 2x^3y, \quad \text{отсюда } \mathrm{MRS}_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{3y}{2x}.$$

При ценах благ p_x, p_y в точке оптимума потребителя соотношение цен p_x/p_y равно предельной норме замены, так что

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{3y}{2x},$$

или

$$\frac{p_x x}{p_y y} = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что $p_x x$ и $p_y y$ — это расходы потребителя соответственно на первое и второе блага. Отсюда ясно, как данный потребитель распределяет свой бюджет: долю 0.6 своего дохода он должен потратить на покупку первого блага, долю 0.4 — на покупку второго. Если его доход равен I, то объемы спроса на первое и на второе благо равны:

$$x = 0.6 \cdot \frac{I}{p_x}; \qquad y = 0.4 \cdot \frac{I}{p_y}.$$

Каждое из приведенных равенств описывает функцию спроса на соответствующее благо.

б) Те же рассуждения применительно к более общему случаю приводят к соотношению:

$$\frac{p_x x}{p_y y} = \frac{\alpha}{\beta},$$

откуда:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{I}{p_x}; \qquad y = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{I}{p_y}.$$

Комментарий.

В приведенных задачах объем спроса на каждое благо зависел от дохода и от цены данного блага и не зависел от цены другого блага, а доля расходов на данное благо в величине дохода зависела только от параметров функции полезности и не зависела ни от дохода, ни от цен.

Постоянство доли расходов (независимость от дохода) означает, что оба блага занимают пограничное положение между необходимыми и роскошными благами. Независимость объема спроса на каждое благо от цены другого блага означает, что блага независимы в потреблении.

Доли расходов на каждое благо зависели не от абсолютных значений параметров α и β, а лишь от их соотношения. Так, решение в п. а) не изменилось бы, если бы показатели степени равнялись не 3 и 2, а, скажем, 15 и 10 или 0.3 и 0.2. Последнее обстоятельство связано с тем, что функции полезности, связанные монотонно возрастающим преобразованием, представляют одну и ту же систему предпочтений (порядковая концепция полезности). Пусть $\mathbf{x}$ — вектор, представляющий набор благ, $U_1(\mathbf{x})$ и $U_2(\mathbf{x})$ — функции полезности, причем $U_2(\mathbf{x}) = \varphi(U_1(\mathbf{x}))$, где φ — монотонно возрастающая функция. В этом случае если $U_1(\mathbf{x}_1) > U_1(\mathbf{x}_2)$, то и $U_2(\mathbf{x}_1) > > U_2(\mathbf{x}_2)$, т. е. набор, оцениваемый функцией U_1 как более предпочтительный, так же оценивается и функцией U_2. Возведение в положительную степень — монотонно возрастающее преобразование, и функция $x^{15}y^{10} = (x^3y^2)^5$ описывает ту же систему предпочтений, что и функция в задании а). Тот же результат дает и, например, логарифмирование:

$$U_3(\mathbf{x}) = 3 \ln x + 2 \ln y = \ln(x^3y^2).$$

В заданиях потребитель ограничивался двумя благами, но выводы остаются справедливыми при произвольном числе благ. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \tag{1}$$

причем без потери общности можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{2}$$

Будем использовать обозначения для предельных полезностей,

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j} = \frac{\alpha_i U}{x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда получаем выражение для предельных норм замены:

$$\mathrm{MRS}_{ij} = \frac{U_i}{U_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \frac{x_j}{x_i},$$

Полученное выражение позволяет при заданных ценах выразить расходы на все потребляемые блага через расходы на какое-нибудь одно, например первое:

$$\mathrm{MRS}_{ij} = \frac{p_1}{p_i} = \frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot \frac{x_i}{x_1}, \quad \text{откуда:}$$

$$p_i x_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} p_1 x_1 . \tag{3}$$

Теперь бюджетное ограничение можно представить в виде

$$p_1 x_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) = I,$$

так что с учетом равенства (2) $p_1 x_1 = \alpha_1 I$, а равенство (3) показывает, что аналогичные выражения справедливы для всех благ: $p_i x_i = \alpha_i I$. Таким образом, если функция полезности имеет вид (1), то доли расходов на отдельные блага в общей сумме не зависят ни от величины дохода, ни от цен. Они представляют собой постоянные величины, пропорциональные параметрам α_i, а если эти параметры нормированы в соответствии с равенством (2), то доли совпадают с параметрами. Объем спроса на каждое благо равен $x_i = \alpha_i I / p_i$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Нетрудно заметить, что $U_1(x, y) = \ln U_2(x, y)$. Логарифм — возрастающая функция. Если первый потребитель предпочитает набор (x_1, y_1) набору (x_2, y_2), т. е. если $U_1(x_1, y_1) > U_1(x_2, y_2)$, то $U_2(x_1, y_1) > U_2(x_2, y_2)$, а это означает, что второй потребитель также предпочитает первый набор второму. В рамках порядковой теории полезности предпочтения потребителей неразличимы.

Комментарии.

1. По формульной записи функций полезности далеко не всегда легко догадаться, что одна из них является функцией от другой. Но это всегда можно выяснить, сравнив предельные нормы замены: если предельные нормы замены совпадают при любых комбинациях благ, то они выражают одну и ту же систему предпочтений индивидов. При решении задачи 2 определена предельная норма замены для первого индивида:

$$\mathrm{MRS}^1_{xy}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Для второго индивида

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{y}{x(x+y)}; \qquad \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} = \frac{x}{y(x+y)},$$

так что

$$\mathrm{MRS}^2_{xy}(x, y) = \frac{\partial U_2 / \partial x}{\partial U_2 / \partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Таким образом, для любых комбинаций (x, y) предельные нормы замены для обоих индивидов совпадают, следовательно, совпадают и их предпочтения.

2. Концепция порядковой полезности служит основой теории потребительского выбора *при отсутствии риска*. Для теоретического описания потребительского поведения в *рисковой* ситуации она оказывается недостаточной. В теории выбора в условиях риска утверждается существование такой функции полезности, к максимизации математического ожидания которой стремится потребитель (*функция полезности фон Неймана–Моргенштерна*). В этом отношении предпочтения индивидов в данной задаче различны, если условиями заданы функции полезности фон Неймана–Моргенштерна. Допустим, что в рассматриваемых примерах цены продуктов численно равны, так что, как легко проверить, в выбираемых обоими потребителями наборах $x = y$. Допустим также, что потребителю предлагают указать набор благ, столь же полезный, как лотерея из наборов (1, 1) и (5, 5) с равными ве-

роятностями. Так как $x \cdot x/(x+x) = x/2$, первый потребитель укажет набор (x, x), удовлетворяющий условию:

$$0.5 \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{x}{2},$$

откуда $x = 3$, так что он укажет набор (3, 3). Соответствующее условие для второго потребителя:

$$0.5 \cdot \ln\frac{1}{2} + 0.5 \cdot \ln\frac{5}{2} = \ln\frac{x}{2},$$

откуда $x = \sqrt{5} \approx 2.236$, и он укажет набор (2.236, 2.236). Выбранный первым индивидом набор (3, 3) окажется для второго индивида более полезным, чем предложенная лотерея.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

Одна из аксиом потребительских предпочтений — аксиома ненасыщаемости («больше лучше, чем меньше»). Поэтому представляется очевидным, что любой потребитель предпочтет продукт 2 продукту 1 ($x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$) — продукт 2 *доминирует* над продуктом 1. На рисунке область доминирования по отношению к продукту 1 («северо-восточный угол») показана штриховыми линиями; точка, соответствующая продукту 2, располагается в этой области. Если по отношению к данному продукту есть доминирующий (на графике он располагался бы правее и выше данного), то ни один потребитель не выберет данный продукт. Таким образом, продукт 1 не может быть продан.

Кроме того, продукт не может быть продан, если он уступает по обеим характеристикам некоторому набору продуктов, приобретаемому за ту же цену. Если в набор входят n продуктов в количествах λ_i, таких что

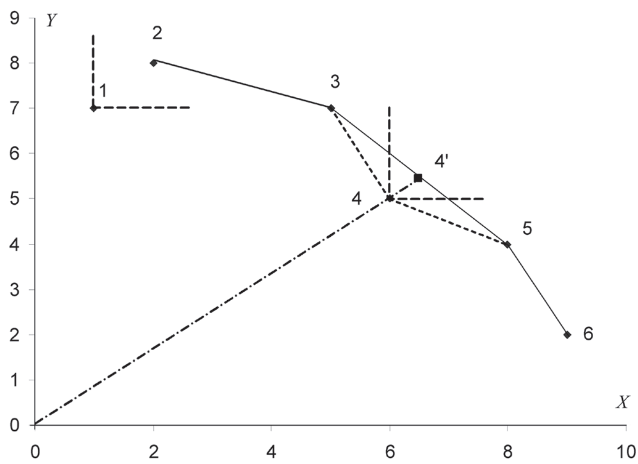
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1; \qquad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то такой λ_i набор будет обладать характеристиками

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i,$$

и если каждый из продуктов мог быть куплен за одну денежную единицу, то и набор может быть куплен также за одну единицу. Если некоторый продукт доминируется набором из других продуктов, то каждый потребитель предпочтет ему этот набор.

Если выбор осуществляется в пространстве двух характеристик, достаточно ограничиться двухпродуктовыми наборами; все возможные наборы из двух конкретных продуктов графически представляются отрезками, соединяющими точки, обозначающие эти продукты. Таким образом, если на графике правее и выше данного продукта имеются точки отрезка, соединяющего два других продукта, то это означает, что существуют наборы, доминирующие над данным продуктом. Если составить набор из третьего и пятого продуктов в количествах $\lambda_3 = ⅔$, $\lambda_5 = ⅓$, то мы получим набор с характеристиками $x = 6 = x_4$ и $y = 6 > y_4$ (точка 4′ на рисунке), доминирующий по отношению к четвертому продукту (для доминирования i над j требуется $x_i \geq x_j$ и $y_i \geq y_j$, причем по крайней мере одно из неравенств должно быть строгим).



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

а) Найдем выражения для предельных полезностей:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2}; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

Приравнивая предельную норму замены соотношению цен:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{9}{4},$$

находим: $y = 1.5x$. Из равенства дохода и расходов, $9x + 4 \cdot 1.5x = 60$, определяются объемы спроса: $x = 4$, $y = 6$.

б) Выполним те же действия без использования числовых значений данных. Соотношение между объемами спроса на блага равно $y = x\sqrt{p_X / p_Y}$. Отсюда:

$$x = \frac{I}{p_X + \sqrt{p_X p_Y}}; \qquad y = \frac{I}{p_Y + \sqrt{p_X p_Y}}.$$

в) Последние равенства показывают, что при фиксированной величине дохода объем спроса на каждое благо снижается как при росте цены этого, так и при росте цены другого блага. Это означает, что блага являются взаимно дополняющими.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

а, б) Рассуждая по аналогии с решением предыдущей задачи, находим:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{10}{5}.$$

Отсюда $y = x \cdot (p_X / p_Y)^2 = 4x$. Из равенства дохода и расходов, $10x + 5 \cdot 4x = 60$, находим $x = 2$, $y = 8$.

Зависимость объемов спроса от цен и дохода описывается равенствами

$$x = \frac{I}{p_X \cdot (1 + p_X / p_Y)}; \qquad y = \frac{I}{p_Y \cdot (1 + p_Y / p_X)}.$$

в) Последние равенства показывают, что при фиксированной величине дохода объем спроса на каждое благо снижается при росте цены этого блага, но возрастает с увеличением цены другого блага. Это означает, что блага являются взаимно заменяющими.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 9

Найдем выражения для предельных полезностей:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 1.$$

Далее, найдем выражение для предельной нормы замены:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{1}{x^2}.$$

Так как в точке потребительского оптимума предельная норма замены равна соотношению цен, справедливо равенство

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{1}{x^2},$$

откуда непосредственно находится объем потребления блага X:

$$x = \sqrt{\frac{p_Y}{p_X}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = 1.25$$

и блага Y

$$y = \frac{I - \sqrt{p_X p_Y}}{p_Y}.$$

Спрос на благо X, как мы видим, не зависит от дохода (в дальнейшем нам придется уточнить это утверждение). Спрос на Y явным образом от дохода зависит. При $I = 70$ имеем:

$$y = \frac{70 - \sqrt{16 \cdot 25}}{25} = 2.$$

При $I = 15$:

$$y = \frac{I - A}{I} < \left(\frac{p_б}{p_а}\right)^{\alpha}$$

Ясно, что объем потребления не может быть отрицательным. Но, согласно полученному выражению для y, условие $y \geq 0$ выполняется при $I \geq \sqrt{p_X p_Y} = 20$ и нарушается в противном случае. Естественно предположить, что при нарушении этого условия домашнее хозяйство полностью отказывается от блага Y, так что $y = 0$. Но в таком случае и выражение для x становится неверным: так как весь доход расходуется на благо X, объем его потребления равен $x = I/p_X$.

Для проверки этого предположения выясним, какие значения принимает предельная норма замены на бюджетной границе, описываемой равенством $p_X x + p_Y y = I$. Из условия $y \geq 0$ следует, что $p_X x \leq I$ и $x \leq I/p_X$. Поэтому на бюджетной границе

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{1}{x^2} \geq \frac{p_X^2}{I^2} = \frac{16^2}{I^2}.$$

Равенство $\mathrm{MRS}_{XY} = p_X/p_Y = 16/25 = 0.625$ есть условие *внутреннего* потребительского оптимума. При $I = 70$ предельная норма замены на бюджетной границе не меньше $16^2/70^2 \approx 0.052$, и в некоторой точке (а именно $x = 1.25$, $y = 2$) она равна 0.625. Это и есть найденный выше внутренний оптимум. При $I = 15$ на бюджетной границе $\mathrm{MRS}_{XY} \geq 16^2/15^2 \approx 1.138$ и значения, равного 0.625, на бюджетной линии не существует. Это означает, что потребительский оптимум занимает *граничное*, или, как его чаще называют в экономике, *угловое* положение. Таким образом,

$$x = \sqrt{\frac{p_Y}{p_X}}, \qquad y = \frac{I - \sqrt{p_X p_Y}}{p_Y} \qquad \text{при} \quad I \geq \sqrt{p_X p_Y};$$

$$x = \frac{I}{p_X}, \qquad y = 0 \qquad \text{при} \quad I < \sqrt{p_X p_Y}.$$

Комментарий.

Если при некоторых значениях (x, y), лежащих на бюджетной границе, имеет место неравенство $\mathrm{MRS}_{XY} > p_X/p_Y$, то в интересах потребителя несколько увеличить потребление блага X, соответственно сократив потребление блага Y. Если неравенство имеет противоположный знак, то потребитель может повысить полезность потребляемого набора, сместившись вдоль бюджетной границы в сторону уменьшения потребления блага X и увеличения потребления блага Y. Если в некоторой внутренней точке бюджетной границы выполняется равенство $\mathrm{MRS}_{XY} = p_X / p_Y$, то, как следует из выпуклости кривых безразличия к началу координат, и увеличение, и уменьшение значения x привели бы к снижению полезности. Это и означает, что в данной точке достигается потребительский оптимум. Но если на бюджетной границе всюду имеет место соотношение $\mathrm{MRS}_{XY} > p_X/p_Y$, то в каждой внутренней точке границы потребитель заинтересован в увеличении x, так что оптимум достигается при полном расходовании дохода на покупку блага X и отказе от блага Y.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ №10

Определим выражение для предельной нормы замены блага X благом Y:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a + y; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = b + x,$$

так что

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{a + y}{b + x}. \tag{1}$$

Условие внутреннего оптимума потребителя имеет вид $\mathrm{MRS}_{XY} = p_X/p_Y$, откуда

$$y = \frac{p_X}{p_Y} \cdot (b + x) - a.$$

С учетом этого выражения уравнение баланса дохода и расходов принимает вид

$$I = p_X x + p_Y y = p_X x + p_X \cdot (b + x) - p_Y a,$$

откуда

$$x = \frac{I + p_Y a}{2p_X} - \frac{b}{2}; \qquad y = \frac{I + p_X b}{2p_Y} - \frac{a}{2}.$$

Подставляя в эти выражения числовые значения задания а), найдем, что $x = 9.5$, $y = 76.25$.

Подстановка числовых значений задания б) приводит к результату: $x = -0.5$, $y = 51.25$. Поскольку отрицательный объем потребления невозможен, полученный результат означает, что *внутренний* оптимум потребителя при данных условиях не существует. Следовательно, оптимум принимает *граничное* положение: $x = 0$, $y = I/p_Y = 50$. См. комментарий к предыдущей задаче.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 11

а) Можно утверждать, что благосостояние домашнего хозяйства не ухудшится: повышение цены при прежнем объеме потребления полностью компенсируется, так что исходный набор благ доступен и после повышения цены. Но соотношение цен изменилось, и потребитель после повышения цены блага X предпочтет иной набор благ. Отношение цен p_X/p_Y, где Y — любое благо, отличное от X, увеличится, и оптимум переместится к набору с большей нормой замены MRS_{XY}.

б) Функция полезности имеет вид $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, $\alpha = \beta = 0.5$. Поэтому можно воспользоваться формулами, приведенными в решении задачи № 4, и найти объемы потребления благ до повышения цен:

$$x = \frac{0.5 \cdot 100}{10} = 5, \qquad y = \frac{0.5 \cdot 100}{1} = 50,$$

так что полезность до повышения цены блага X равна $\sqrt{5 \cdot 50} = 15.81$. После повышения цены доход, включающий компенсацию, составил $100 + 20 = 120$, объемы потребления:

$$x = \frac{0.5 \cdot 120}{14} = 4.29, \qquad y = \frac{0.5 \cdot 120}{1} = 60,$$

и полезность приняла значение $\sqrt{4.29 \cdot 60} = 16.04$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 12

Пусть x обозначает объем потребления блага X; p — его цена; I — доход домашнего хозяйства; $s = px/I$ — доля дохода, направляемая на благо X. Так как зависимость потребления от дохода рассматривается в предположении фиксированных цен, для эластичности доли справедливо равенство

$$\mathbf{E}_I[s] = \mathbf{E}_I[px/I] = \mathbf{E}_I[x] - 1$$

(см. Приложение). Для возрастающей доли $\mathbf{E}_I[s] > 0$, для убывающей доли $\mathbf{E}_I[s] < 0$, откуда следуют оба утверждения.

Комментарий.

С зависимостью объема потребления от дохода связана классификация благ: если с ростом дохода потребление убывает, благо относят к *низшим* (или *некачественным*), а если возрастает, то — к *нормальным*. Нормальные блага, в свою очередь, относят к *необходимым* (или *качественным*), если с ростом дохода его доля, направленная на данное благо убывает; если же эта доля возрастает, то благо относят к *роскошным* (или *высококачественным*). Доказываемые в задаче утверждения позволяют связать эту классификацию с эластичностью объема потребления блага по доходу: если $\mathbf{E}_I[x] < 0$, благо относят к низшим, при противоположном знаке неравенства — к нормальным. Если $0 < \mathbf{E}_I[x] < 1$, благо считается необходимым, а при $\mathbf{E}_I[x] < 1$ — роскошным.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 13

а) Пусть w_X, w_Y, w_Z — расходы на покупку соответствующих благ; I — доход домашнего хозяйства. Справедливы равенства

$$w_X + w_Y + w_Z = I; \tag{1}$$

$$w_X = 0.5I; \qquad w_Y = 0.3I; \qquad w_Z = 0.2I.$$

Малое относительное приращение дохода δI повлекло бы относительные приращения объемов потребления благ X и Y величиной $2 \cdot \delta I$ и $0.6 \cdot \delta I$, совпадающие с относительными приростами расходов на покупку (цены считаются неизменными). Неизвестное относительное приращение объема потребления блага Z обозначим δ_Z. Баланс дохода и расходов теперь примет вид:

$$0.5I \cdot (1 + 2 \cdot \delta I) + 0.3I \cdot (1 + 0.6 \cdot \delta I) + 0.2I \cdot (1 + \delta_Z) = I \cdot (1 + \delta I).$$

Отсюда $0.2 \cdot \delta_Z = -0.18 \cdot \delta I$, так что $\mathbf{E}_I[z] = -0.9$.

Комментарий.

Приведенные рассуждения носят приближенный характер: они оперируют с конечными приращениями, в то время как эластичности — дифференциальные характеристики. Тем не менее результат оказался точным. Чтобы убедиться в этом, обратимся к свойству эластичности суммы (см. Приложение).

Эластичности по доходу объемов потребления благ и соответствующих расходов совпадают, поскольку эти величины различаются постоянными множителями — ценами. Так как равенство (1) выполняется при любых доходах, эластичности левой и правой его частей равенства совпадают:

$$\mathsf{E}_I[w_X + w_Y + w_Z] = 1,$$

или

$$\frac{w_X \mathsf{E}_I[w_X] + w_Y \mathsf{E}_I[w_Y] + w_Z \mathsf{E}_I[w_Z]}{w_X + w_Y + w_Z} =$$

$$= s_X\ \mathsf{E}_I[w_X] + s_Y\ \mathsf{E}_I[w_Y] + s_Z\ \mathsf{E}_I[w_Z] = 1,$$

т. е. среднее арифметическое значение эластичностей по доходу объемов всех потребляемых домашним хозяйством благ равно единице. Поэтому

$$\mathsf{E}_I[w_Z] = [1 - (s_X\ \mathsf{E}_I[w_X\ ] + s_Y\ \mathsf{E}_I[w_Y])]/s_Z = -0.9.$$

б) Благо Z является низшим, блага X и Y — нормальные; при этом X — роскошное, Y — необходимое благо.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 14

В комментарии к предыдущей задаче показано, что эластичности потребления всех благ по доходу в среднем равны единице. Доказательство приведено для трех благ, но оно очевидным образом обобщается для произвольного числа благ. Поэтому если эластичность потребления некоторого блага отрицательна, то эластичности прочих благ не могут все быть меньше или равны 1. Иными словами, найдется хотя бы одно благо, эластичность потребления которого по доходу строго больше 1, т. е. роскошное благо.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 15

Все три потребителя имеют функции полезности одинакового вида: $U = x^{\alpha}y^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$. Воспользовавшись решением задачи № 4, можем утверждать, что объем потребления услуг телефонной станции при цене $p_а$ без абонентской платы равен $x_а = \alpha I/p_а$, объем потребления прочих благ — $y_а = \beta I$, так что значение функции полезности

$$U_а = \alpha^{\alpha}\,\beta^{\beta}\,I\,p_а^{-\alpha}$$

(здесь учтено то обстоятельство, что цена прочих благ принята равной 1).

Абонементная плата равносильна уменьшению дохода на соответствующую величину. При абонементной плате A и повременной $p_б$ объемы потребления благ равны $x_б = \alpha(I - A)/p_б$, $y_б = \beta(I - A)$ и значение функции полезности

$$U_б = \alpha^{\alpha}\,\beta^{\beta}(I - A)\,p_б^{-\alpha}\,.$$

Выбор потребителя определяется тем, какая из величин, $U_а$ или $U_б$, больше: если $U_а > U_б$, то он выберет тариф (а), при противоположном соотношении — тариф (б). Таким образом, тариф (а) выбирается при условии

$$\alpha^{\alpha}\,\beta^{\beta}\,I\,p_а^{-\alpha} > \alpha^{\alpha}\,\beta^{\beta}(I - A)\,p_б^{-\alpha}\,,$$

или

$$\frac{I - A}{I} < \left(\frac{p_б}{p_а}\right)^{\alpha}.$$

Для первого потребителя ($I = 100$, $\alpha = 0.5$) выполняется противоположное неравенство

$$0.8 > 0.5^{0.5} = 0.707,$$

и он предпочтет вариант (б). Для второго потребителя ($I = 100$, $\alpha = 0.25$):

$$0.8 < 0.5^{0.25} = 0.841,$$

и для него предпочтительнее вариант (а). Для третьего ($I = 200$, $\alpha = 0.25$):

$$0.9 > 0.5^{0.5} = 0.841,$$

так что он выберет вариант (б).

Комментарий.

При анализе поведения потребителя на рынке отдельного блага оказывается полезным прием, сводящий выбор набора из многих благ к выбору набора из двух благ. В качестве одного из них выступает рассматриваемое благо, в качестве второго — набор, включающий все остальные блага. Этот набор (так называемое *композитное* благо) измеряется расходами на его приобретение. Вследствие этого его цена всегда равна единице.