$$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5}(x_2 - 10)^{0.3}, \qquad x_1 > 5, \; x_2 > 10$$

и цены ресурсов $p_1 = 1$; $p_2 = 4$. Найти:

а) уравнение пути оптимального роста фирмы;

б) функции общих, средних и предельных затрат длительного периода;

в) эффективный масштаб производства;

г) функции общих, средних и предельных затрат короткого периода, считая второй ресурс постоянным, $x_2 = 20$.

ЗАДАЧА № 5

В состав фирмы входят два завода, производящие один и тот же продукт в количествах q_1 и q_2 и имеющие функции затрат

$$\text{TC}_1(q_1) = 200 + 10q_1 + 0.5q_1^2;$$

$$\text{TC}_2(q_2) = 100 + q_2 + 2q_2^2.$$

Найти функцию затрат фирмы TC(Q), где Q — объем выпуска фирмы.

ЗАДАЧА № 6

Несколько изменим условия задачи. Пусть теперь

$$\text{TC}_1(q_1) = 200 + 10q_1 + 0.5q_1^2;$$

$$\text{TC}_2(q_2) = 100 + 25q_2 + 2q_2^2.$$

Найти функцию затрат фирмы TC(Q), где Q — объем выпуска фирмы.

3.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Производственная функция $q = f(x_1, x_2)$ с постоянной отдачей от масштаба обладает следующим свойством: при любом положительном k выполняется равенство

$$f(kx_1,\ kx_2) = kf(x_1,\ x_2).$$

Почленно дифференцируя это равенство по k, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot x_2=f(x_1,x_2), \qquad (1)$$

или $MP_1 \cdot x_1 + MP_2 \cdot x_2 = q$, откуда $MP_2 = (q - MP_1 \cdot x_1)/x_2$.

При данных задачи находим: $MP_2 = (60 - 3 \cdot 12)/4 = 6$.

Комментарий. Равенство (1) есть частный случай уравнения Эйлера: если функция $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ однородна степени α, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}=\alpha f(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Производственная функция с постоянной отдачей от масштаба — однородная функция первой степени, или линейно-однородная функция.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Эластичность замещения ресурсов представляет собой эластичность отношения количеств ресурсов x_2/x_1 по предельной норме технической замены $MRTS_{12}$.

а) Найдем предельные продукты ресурсов:

$$MP_1=\frac{a}{2\sqrt{x_1}}; \qquad MP_2=\frac{b}{2\sqrt{x_2}}.$$

Отсюда

$$MRTS_{12}=\frac{MP_1}{MP_2}=\frac{a}{b}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.$$

Предельная норма технической замены представляет собой степенную функцию отношения x_2/x_1; показатель степени равен 1/2. Эластичность степенной функции равна показателю степени, так что эластичность $MRTS_{12}$ по x_2/x_1 равна 1/2, а эластичность обратной зависимости, которая нас интересует, равна 2.

б) $MP_1 = a\cdot\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}$; $MP_2 = a\cdot\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}$; $MRTS_{12}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{x_2}{x_1}$.

В этом случае зависимость также степенная, показатель степени равен 1; соответственно эластичность замещения равна 1.

$$\text{в) } MP_1 = \frac{bx_2^2}{(ax_1 + bx_2)^2};\ MP_2 = \frac{ax_1^2}{(ax_1 + bx_2)^2};\ MRTS_{12} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

Здесь показатель степени равен 2, эластичность замещения равна 1/2.

Комментарий. В рассмотренных задачах пропорция затрачиваемых ресурсов и предельная норма технической замены были связаны степенными зависимостями. Эластичность степенной функции — постоянная величина; производственные функции, обладающие подобными свойствами, получили название функций с постоянной эластичностью замещения, или ПЭЗ-функций. Они служат удобными моделями и широко используются в микроэкономическом анализе. В частности, они позволяют оценивать взаимозависимость ресурсов в производстве: если эластичность замещения ресурсов больше 1, то ресурсы являются взаимно заменяющими, а если меньше, то — дополняющими. В случае а) ресурсы были взаимными заменителями, в случае в) — дополнителями. В случае б) ресурсы были взаимно независимыми.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

а) Путь оптимального роста фирмы — это множество экономически эффективных способов производства, т. е. таких способов, которые позволяют произвести любое возможное количество продукта с минимальной стоимостью используемых ресурсов. Для каждого экономически эффективного способа предельная норма технического замещения ресурсов равна соотношению их цен.

Предельные производительности ресурсов

$$MP_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}; \qquad MP_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}};$$

предельная норма технической замены

$$\mathrm{MRTS}_{12} = \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MP}_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Таким образом, путь оптимального роста — прямая, описываемая уравнением

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

б) Используем полученное уравнение для определения экономически эффективного набора ресурсов, необходимого для производства продукта в количестве q. Подставим выражение для x_2 в производственную функцию:

$$q = a \cdot \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \cdot x_1,$$

откуда

$$x_1 = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}; \qquad x_2 = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

$$\mathrm{LTC}(q) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{2q}{a}\sqrt{p_1 p_2}.$$

в) В случае, когда $x_2 = \mathrm{const}$, изменение объема выпуска достигается выбором соответствующей величины x_1, так что в коротком периоде

$$x_1 = \frac{q^2}{a^2 x_2},$$

и поэтому

$$\mathrm{STC}(q) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{p_1 q^2}{a^2 x_2} + p_2 x_2.$$

Комментарий. Поскольку $\mathrm{LTC}(q)$ — это минимальные затраты на производство объема q при условии, что все ресурсы — переменные, а $\mathrm{STC}(q)$ — минимальные затраты при условии, что некоторые ресурсы — постоянные, можно утверждать, что $\mathrm{STC}(q) \geq \mathrm{LTC}(q)$ при любом q. Выражения для затрат короткого и длительного периодов, полученные при решении задачи, иллюстрируют это общее положение:

$$\mathrm{STC}(q) - \mathrm{LTC}(q) = \frac{p_1 q^2}{a^2 x_2} + p_2 x_2 - \frac{2q}{a}\sqrt{p_1 p_2} = \left(\frac{q\sqrt{p_1}}{a\sqrt{x_2}} - \sqrt{p_2 x_2}\right)^2 \geq \mathbf{0}.$$

Равенство достигается при значении q, обращающем в нуль выражение в круглых скобках:

$$q = a\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}x_2,$$

т. е. при том объеме выпуска, для которого в условиях длительного периода второй ресурс использовался бы в данном объеме x_2 (проверьте!).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

а) Пользуясь методами, примененными при решении предыдущей задачи, находим:

$$\mathrm{MP}_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = (x_1 - 5)^{-0.5} \cdot (x_2 - 10)^{0.3};$$

$$\mathrm{MP}_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0.6 \cdot (x_1 - 5)^{0.5} \cdot (x_2 - 10)^{-0.7};$$

$$\mathrm{MRTS}_{12} = \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MP}_2} = \frac{1}{0.6} \cdot \frac{x_2 - 10}{x_1 - 5} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем уравнение пути оптимального роста:

$$x_2 = 10 + 0.15 \cdot (x_1 - 5).$$

б) Используем полученное уравнение для определения экономически эффективного набора ресурсов, необходимого для производства заданного объема q продукта. Подставим выражение для x_2 в производственную функцию:

$$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5} \cdot [0.15 \cdot (x_1 - 5)]^{0.3} = 1.1320(x_1 - 5)^{0.8},$$

откуда определяются

$$x_1 = 5 + 0.8564\, q^{1.25}; \qquad x_2 = 10 + 0.12846\, q^{1.25}$$

и функции затрат

$$\mathrm{LTC}(q) = p_1x_1 + p_2x_2 = 45 + 1.3702\, q^{1.25};$$

$$\mathrm{LAC}(q) = \frac{45}{q} + 1.3702\, q^{0.25}; \ \mathrm{LMC}(q) = 3.6025 \cdot 10^{-3}\, q^{0.25}.$$

в) Эффективный масштаб производства q_e определяется объемом выпуска, при котором средние затраты принимают минимальное значение; при этом выполняется равенство $MC(q_e) = AC(q_e)$, из которого находим $q_e = 49.520$. При этом $\min LAC(q) = 4.544$, ресурсы используются в количествах $x_1 = 117.5$, $x_2 = 26.875$.

г) В коротком периоде зависимость объема выпуска от использования единственного переменного ресурса описывается равенством

$$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5}(20 - 10)^{0.3} = 3.9905 \cdot (x_1 - 5)^{0.5},$$

так что количество первого ресурса для выпуска q единиц продукта равно

$$x_1 = 5 + 0.062797q^2,$$

и функции затрат

$$STC(q) = 1 \cdot (5 + 0.062797q^2) + 4 \cdot 20 = 85 + 0.062797q^2$$

$$SAC(q) = \frac{85}{q} + 0.062797q; \qquad SMC(q) = 0.12559q.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Любой объем выпуска фирмы $Q = q_1 + q_2$ должен быть распределен между заводами таким образом, чтобы суммарные затраты $TC(Q) = TC_1(q_1) + TC_2(q_2)$ были минимальными. Таким образом, функция затрат фирмы определяется условием:

$$TC(Q) = \min(TC_1(q_1) + TC_2(q_2)) \text{ при условии } Q = q_1 + q_2.$$

В рассматриваемом случае двух заводов эффективное распределение объема производства легко найти подстановкой $q_2 = Q - q_1$ и последующей минимизацией суммы функций затрат обоих заводов:

$$TC_1(q_1) + TC_2(Q - q_1) =$$

$$= 200 + 10q_1 + 0.5q_1^2 + 100 + 10(Q - q_1) + 2(Q - q_1)^2.$$

Минимум достигается при $q_1 = 0.8Q$, так что $q_2 = 0.2Q$. Подстановка в полученное выражение найденного значения q_1 дает выражение для искомой функции затрат:

$$TC(Q) = 300 + 10Q + 0.4Q^2.$$

Комментарий. Отметим одно свойство эффективного распределения. Подстановка найденных выражений для q_1 и

q_2 в выражения для предельных затрат заводов показывает, что значения предельных затрат заводов одинаковы:

$$MC_1(q_1) = 10 + q_1 = 10 + 0.8Q; \; MC_2(q_2) = 10 + 4q_2 = 10 + 0.8Q.$$

Кроме того, эти значения совпадают с предельными затратами фирмы в целом:

$$MC(Q) = 10 + 0.8Q.$$

Этот результат справедлив для любых функций затрат заводов (с некоторыми оговорками, обсуждаемыми в комментарии к задаче № 6). Воспользовавшись подстановкой, примененной выше при решении задачи, сформулируем требование к распределению объема производства в виде минимизации суммы $TC_1(q_1) + TC_2(Q - q_1)$. Дифференцируя по q_1, найдем, что $MC_1(q_1) - MC_2(Q - q_1) = 0$, т. е. при эффективном распределении $MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$.

Равенство предельных затрат имеет ясный экономический смысл. Если при некотором распределении предельные затраты оказываются неравными, например $MC_2(q_2) > MC_1(q_1)$, то уменьшение объема q_2 на малую величину $\varepsilon > 0$ с одновременным увеличением на такую же величину объема q_1 не изменит общего объема выпуска фирмы Q, но сократит общие затраты фирмы, так как сокращение затрат второго завода ($MC_2 \cdot \varepsilon$) превысит увеличение затрат первого завода ($MC_1 \cdot \varepsilon$).

Кроме того, результат будет тем же при произвольном числе заводов. Покажем это, воспользовавшись методом множителей Лагранжа. Если в состав фирмы входят n заводов, то функция общих затрат фирмы при эффективном распределении объема производства между заводами определяется условием

$$TC(Q) = \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) \quad \text{при условии} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = Q.$$

Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи условной минимизации:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q\right),$$

где λ — множитель Лагранжа. Условие минимума:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = MC_i(q_i) - \lambda = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

так что при эффективном распределении общего объема производства

$$MC_i(q_i) = \lambda, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

т. е. предельные затраты всех заводов равны одной и той же величине λ. В свою очередь множитель Лагранжа равен производной минимизируемой функции ($TC(Q)$) по ограничивающему параметру (Q), следовательно, $MC(Q) = \lambda$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

Воспользовавшись рассмотренным выше свойством эффективного распределения, приравняем предельные затраты первого завода $MC_1(q_1) = 10 + q_1$ предельным затратам второго $MC_2(q_2) = 25 + 4q_2$ и получим соотношение $q_1 = 15 + 4q_2$. Так как $Q = q_1 + q_2 = 15 + 5q_2$, находим:

$$q_2 = 0.2Q - 3; \qquad q_1 = 0.8Q + 3.$$

Такое распределение возможно лишь при $Q \geq 15$: в противном случае оказалось бы $q_2 < 0$, что невозможно, и $q_1 > Q$, что также невозможно. Не учитывая условие неотрицательности q_1 и q_2, мы пришли к результату, верному лишь при достаточно больших общих объемах. При $Q < 15$ эффективным окажется «распределение», при котором весь объем выпуска фирмы будет осуществляться первым заводом. Итак,

$$q_1 = Q, \qquad q_2 = 0 \qquad \text{при } Q < 15;$$
$$q_1 = 0.8Q + 3, \qquad q_2 = 0.2Q - 3 \qquad \text{при } Q \geq 15.$$

Комментарий. Методы дифференциального исчисления позволяют найти внутренние экстремумы. В первой части задачи при любых значениях Q существовали внутренние решения: и q_1, и q_2 можно было как увеличить, так и уменьшить на достаточно малую величину. Во второй части такая возможность для распределения при $Q < 15$ отсутствует. В этом случае $MC_1(q_1) = 10 + Q$, $MC_2(q_2) = 25$, так что $MC_2 > MC_1$, но «исправить» распределение, увеличив на q_1 величину ε и соответственно уменьшив q_2, невозможно. Здесь мы имеем дело с граничным оптимумом.