ЗАДАЧА № 8

Фирма потребляет два ресурса в количествах x, y. Производственная функция равна

$$q = \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{y}{4}}.$$

Фирма продает продукцию на конкурентном рынке по цене $P = 8$. Найти функцию спроса на первый ресурс при цене второго $p_y = 0.5$.

5.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Суточный доход $I = wL$, где L — объем предложения труда (часов в сутки). Свободное время $R = 24 - L$. Теперь полезность можно представить в виде функции объема предложения труда:

$$U = \sqrt{wL} + \sqrt{200 \cdot (24 - L)}.$$

Максимум полезности достигается при выполнении условия

$$\frac{dU}{dL} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{L}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{24 - L}} = 0,$$

или

$$\frac{L}{w} = \frac{24 - L}{200},$$

откуда $L = \dfrac{24w}{200 + w}$. Ответы: а) $L = 8$; б) $L = 12$.

в) При наличии автономного дохода функция полезности принимает вид

$$U = \sqrt{wL + I_a} + \sqrt{200 \cdot (24 - L)}.$$

Условие максимума полезности:

$$\frac{dU}{dL} = \frac{1}{2}\frac{w}{\sqrt{wL + I_a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{24 - L}} = 0,$$

или
$$200 \cdot (wL + I_a) = w \cdot (24 - L).$$

Окончательно получаем
$$L = \frac{24w^2 - 200I_a}{w \cdot (200 + w)}.$$

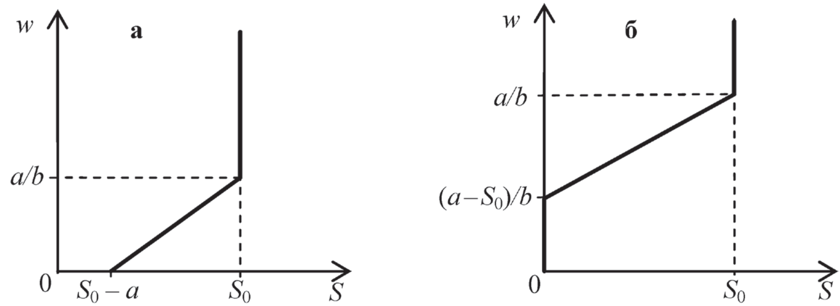
Последнее выражение представляет объем предложения труда как функцию ставки заработной платы и величины автономного дохода. При $w = 100$ и $I_a = 300$ объем предложения труда $L = 6$.

г) Используя найденную в предыдущем пункте функцию предложения труда и полагая $L = 0$, находим $I_a = 1200$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Имея участок в собственности, владелец может оставить его, полностью или частично, для собственного использования. При этом он несет неявные затраты, равные неполученной арендной плате. Верхняя граница цены аренды, при которой собственник будет использовать некоторую площадь, равна a/b. Более высокая цена аренды побуждает его полностью отказаться от использования земли и сдать весь участок в аренду. Таким образом, функция предложения описывается равенством
$$S^S(w) = \begin{cases} S_0 - a + bw, & w \le a / b; \\ S_0, & w > a / b. \end{cases}$$

Здесь следует сделать одно замечание. Приведенное выражение справедливо, если $a \le S_0$, т. е. при сколь угодно малой цене объем собственного спроса землевладельца меньше площади его участка и он готов сдать в аренду площадь не менее $S_0 - a$ (рис. а). Если же $a > S_0$ (рис. б), то при достаточно низкой цене аренды объем спроса собственника превышает площадь его участка и он откажется от сдачи какой-либо площади в аренду (более того, у него останется еще неудовлетворенный спрос). Таким образом, при $a > S_0$ предложение описывается равенством
$$S^S(w) = \begin{cases} 0, & w < (a - S_0) / b; \\ S_0 - a + bw, & (a - S_0) / b \le w \le a / b; \\ S_0, & w > a / b \end{cases}$$



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

Для нахождения потребительского оптимума найдем предельную норму замещения текущего потребления будущим:

$$\frac{\partial U}{\partial C_0} = C_1; \qquad \frac{\partial U}{\partial C_1} = C_0,$$

так что $\mathrm{MRS}_{0,1} = C_1/C_0$; оптимум достигается при $\mathrm{MRS}_{0,1} = 1 + i$, где i — процентная ставка за период. Таким образом, $C_1 = (1 + i)C_0$. Подставляя это соотношение в бюджетное ограничение

$$C_0 + \frac{C_1}{1+i} = I_0 + \frac{I_1}{1+i},$$

найдем, что

$$C_0 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_1}{2(1+i)}.$$

а) Потребитель предъявит спрос на заемные деньги, если желаемые расходы на потребление в текущем периоде превышают доход в этом периоде: $C_0 > I_0$, т. е.:

$$\frac{I_0}{2} + \frac{I_1}{2(1+i)} > I_0, \text{ или } \qquad I_0 < \frac{I_1}{1+i}$$

Разность между величиной желаемых расходов и доходом составляет объем спроса. Т. е. спрос описывается функцией

$$D(i) = \begin{cases} \dfrac{I_1}{2(1+i)} - \dfrac{I_0}{2}, & i < \dfrac{I_1}{I_0} - 1; \\ 0, & i > \dfrac{I_1}{I_0} - 1. \end{cases} \qquad (1)$$

б) Рассуждая аналогично, можно утверждать, что потребитель захочет дать деньги взаймы при условии $I_0 > \frac{I_1}{1+i}$, и его предложение описывается функцией

$$S(i) = \begin{cases} 0, & i < \frac{I_1}{I_0} - 1; \\ \frac{I_0}{2} - \frac{I_1}{2(1+i)}, & i > \frac{I_1}{I_0} - 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Комментарий. В отличие от товарных рынков любой участник рынка заемных средств может оказаться как в роли заемщика (покупателя), так и в роли кредитора — в зависимости от процентной ставки. По этой причине целесообразно объединить функции предложения и спроса, введя в рассмотрение функцию чистого предложения $\mathrm{NS}(i) = S(i) - D(i)$, совпадающую с функцией предложения при $\mathrm{NS}(i) > 0$ и отличающуюся лишь знаком от функции спроса при $\mathrm{NS}(i) < 0$. Таким образом:

$$\mathrm{NS}(i) = \frac{I_0}{2} - \frac{I_1}{2(1+i)}, \qquad i > 0. \qquad (3)$$

в) В предыдущих пунктах предполагалось, что рынок заемных средств совершенный. В данном пункте учитывается, что кредиторы и заемщики действуют через посредников, устанавливающих различные процентные ставки по кредитным и депозитным операциям. Тем не менее формулы (1) и (2) справедливы с одним лишь уточнением: в них фигурируют различные процентные ставки. Следует положить $i = i^D$ в формуле (1) и $i = i^S$ — в формуле (2). Таким образом, потребитель предъявит спрос при $i^D < I_1/I_0$ и предложение — при $i^S > I_1/I_0$. При $i^S \le I_1/I_0 \le i^D$ потребитель не выступит ни в той ни в другой роли.

Комментарий. Для рынка с различными процентными ставками формулу (3) следует откорректировать:

$$\mathrm{NS}(i)=\begin{cases}\dfrac{I_0}{2}-\dfrac{I_1}{2(1+i^S)}, & \dfrac{I_1}{I_0}<i^S;\\ 0, & i^S\le\dfrac{I_1}{I_0}\le\ i^D;\\ \dfrac{I_0}{2}-\dfrac{I_1}{2(1+i^D)}, & \dfrac{I_1}{I_0}>i^D.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

Функции рыночного спроса и рыночного предложения на рынке заемных средств, как и на других рынках, формируется путем суммирования функций индивидуального спроса и индивидуального предложения. Равновесие достигается при такой процентной ставке, при которой объем спроса равен объему предложения. Поскольку на рынке заемных средств роли участников не фиксированы, а зависят от процентной ставки, здесь целесообразно воспользоваться функцией чистого предложения, NS(i) (см. комментарий к предыдущей задаче). Значение рыночной функции чистого предложения при каждом i представляет собой сумму индивидуальных значений:

$$\mathrm{NS}(i)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{NS}_k(i).$$

Здесь NS(i) — рыночная функция, $\mathrm{NS}_k(i)$ — индивидуальная функция чистого предложения k-го участника рынка, k = 1, ..., n. Равновесная ставка процента i_E удовлетворяет равенству $\mathrm{NS}(i_E) = 0$.

В рассматриваемой задаче

$$\mathrm{NS}_A(i)=0-\frac{15}{2\cdot(1+i)};\quad \mathrm{NS}_B(i)=\frac{20}{2}-\frac{20}{2\cdot(1+i)};$$

$$\mathrm{NS}_C(i)=\frac{28}{2}-\frac{25}{2\cdot(1+i)},$$

так что чистое рыночное предложение

$$\mathrm{NS}(i) = \mathrm{NS}_A(i) + \mathrm{NS}_B(i) + \mathrm{NS}_C(i) = 14 - \frac{30}{1+i}.$$

Равновесие достигается при $i_E = 0.25$.

Чистое предложение участников рынка:

$$\mathrm{NS}_A = -6; \qquad \mathrm{NS}_B = 2; \qquad \mathrm{NS}_C = 4.$$

Таким образом, A — заемщик, он берет взаймы 6 единиц у кредиторов B и C, предоставляющих ему 2 и 4 единицы соответственно.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Факторный доход при ставке w равен $I = wF = 100w - 500$. Рента определяется интегралом

$$R(w) = \int_5^w F(x)dx = \int_5^w \left(100 - \frac{500}{x}\right)dx = 500 \cdot \left(\frac{w}{5} - \ln\frac{w}{5} - 1\right). \quad (1)$$

Так как сумма ренты и удерживающего дохода (TE, **T**ransfer **E**arning) равна факторному доходу, удерживающий доход равен

$$\mathrm{TE} = I - R = (100w - 500) - 500 \cdot \left(\frac{w}{5} - \ln\frac{w}{5} - 1\right) = 500\ln\frac{w}{5}.$$

Комментарии. 1. Приведенная здесь функция предложения иллюстрирует случай, когда объем предложения ресурса ограничен сверху некоторым располагаемым его количеством: при неограниченном росте цены ресурса объем его предложения не превышает 100.

2. Рента может быть определена либо интегрированием объема предложения по цене (как это сделано в предлагаемом решении), либо интегрированием по объему превышения цены над значением цены предложения при переменном объеме:

$$R = \int_0^F \left(w - w^S(y)\right)dy = wF - \int_0^F \frac{500dy}{100-y} = 500 \cdot \left(\frac{w}{5} - 1 - \ln\frac{100}{100-F}\right).$$

Подстановка $F = F^S(w)$ приводит к выражению (1). Выбор того или иного способа интегрирования определяется соображениями технического удобства.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

а) Так как фирма является ценополучателем на рынке ресурса X, максимум ее прибыли определяется условием $\mathrm{MRP}_X = \mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_X = w$, где w — цена ресурса. На рынке своего продукта фирма также является ценополучателем, и ее предельная выручка совпадает с ценой, $\mathrm{MR} = P = 50$, так что для нее $P \cdot \mathrm{MP}_X = w$. Предельный продукт ресурса X

$$\mathrm{MP}_X = \frac{dq}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Итак, из условия $50 \cdot 1/\sqrt{x} = 5$ находим объем использования ресурса $x = 100$ и объем производства $q = 2 \cdot \sqrt{x} = 20.$

Из равенства $q = 2 \cdot \sqrt{x}$ находим: $x = q^2/4$. Поскольку X — единственный переменный ресурс, функция общих затрат $\mathrm{TC}(q) = \mathrm{FC} + w \cdot x = \mathrm{FC} + 5 \cdot q^2/4$. Отсюда $\mathrm{MC}(q) = 2.5q$.

б) Теперь фирма является монополистом, ее предельная выручка не совпадает с ценой и в соответствии с рыночном спросом определяется равенством

$$\mathrm{MR} = 75 - 2 \cdot 2.5q = 75 - 5q$$

(для монополии $Q = q$). Используя зависимость q от x, запишем условие максимума прибыли виде уравнения относительно x:

$$\left(75 - 5 \cdot 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 5.$$

Его решение: $x = 25$. Отсюда $q = 10$, $P = 75 - 2.5 \cdot 10 = 50$.

Комментарий. Сравнение этой задачи в частях а) и б) с задачей 4 части IV показывает, что в обеих задачах речь идет об одной и той же ситуации: функция предельных затрат одна и та же, условия продажи продукта совпадают. Из того, что при равенстве цен продажи фирма-монополист производит меньше продукта, чем производила бы в конкурентных условиях, следует, что она потребляет меньшее количество ресурсов (во всяком случае, если переменный ресурс — единственный).

в) Поскольку фирма не является ценополучателем на рынке ресурса, ее оптимум определяется равенством $\mathrm{MRP}_X = \mathrm{MFC}_X$, причем предельные факторные затраты (MFC) не равны цене ресурса. Для общих факторных затрат справедливо равенство $\mathrm{TFC}_X = w^S x) \cdot x = 0.2x^2$, так что предельные расходы равны $\mathrm{MFC}_X = 0.4x$. Таким образом, имеет место соотношение $50 \cdot 1\big/\sqrt{x} = 0.4x$, откуда $x = 25$; цена ресурса определяется функцией предложения и равна $w = 0.2 \times 25 = 5$. Выпуск продукта равен $q = 2\sqrt{25} = 10$.

Комментарий.

г) Фирма не является ценополучателем ни на рынке своего продукта, ни на рынке ресурса, поэтому общее соотношение $\mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_X = \mathrm{MFC}_X$ принимает в данном случае вид

$$(75 - 5q) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.4x.$$

Используя зависимость объема производства от объема использования ресурса X, представим это соотношение в форме уравнения относительно x:

$$(75 - 5 \cdot 2\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.4x.$$

Решая это уравнение (например, каким-либо численным методом), находим:

$$x = 18.542; \qquad q = 2 \cdot \sqrt{18.542} = 8.612;$$

по условиям спроса на продукт фирмы определяем его цену:

$$P = 75 - 2.5 \cdot 8.612 = 53.47$$

а цену ресурса — по условиям его предложения:

$$w = 0.2 \cdot 18.542 = 3.7084.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

Ресурсы абсолютно комплементарны и используются в пропорции 1 : 2. Введем обозначение z для числа потребляемых комплектов, считая комплектом $(x, y) = (1, 2)$. Тогда

$$q = \sqrt{\frac{z}{2}}.$$

Цена комплекта $p_z = p_x + 2p_y$. Определим спрос на комплекты.

$$\mathrm{MRP}_z = \mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_z = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{z}} = \sqrt{\frac{32}{z}} = p_z,$$

так что спрос на комплекты описывается равенством $z = \dfrac{32}{p_z^2}$. Но каждый комплект содержит 1 единицу первого ресурса, так что

$$x = \frac{32}{(p_x + 2p_y)^2} = \frac{32}{(p_x + 1)^2}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

Ресурсы являются совершенными субститутами: 1 единица первого ресурса замещает 2 единицы второго. Поэтому при соотношении цен $p_x > 2p_y$ первый ресурс не используется вовсе. Если же $p_x < 2p_y = 1$, то используется только первый ресурс, при этом $q = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$,

так что

$$\mathrm{MRP}_x = \mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_x = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{8}{x}} = p_x,$$

так что

$$x = \begin{cases} \dfrac{8}{p_x^2}, & p_x < 1; \\ 0, & p_x > 1. \end{cases}$$

При $p_x = 1$ объем спроса на первый ресурс лежит в пределах $(0 \le x \le 8)$, недостающее для выпуску количество восполняется вторым ресурсом.