Предельные выгоды (*MB*) от 1 фонаря

Партии	Предлагаемое количество фонарей				
	10	20	30	40	50
«С роду так»	100	80	60	40	20
«Бедняк»	120	100	80	60	40
«Середняк»	140	120	100	80	60
«Здоровяк»	160	140	120	100	80
«Крупняк»	180	160	140	120	100
ΣMB	700	600	500	400	300

Устав муниципального совета требует принятия решений простым большинством голосов.

33.1. Сколько фонарей будет установлено в муниципальном поселке, если расходы на установку 1 фонаря равны 500 д. е. и заранее определено, что расходы на них делятся между всеми группами поровну? Будет ли это количество фонарей парето-эффективным ?

33.2. Предположим, что «С роду так», «Бедняк» и «Середняк» провели решение, что они покрывают 30% расходов на освещение, которые делятся между ними в пропорции 4 : 5 : 6, соответственно. Сколько тогда фонарей будет установлено и будет ли их количество парето-эффективным?

33.3. Если бы в уставе муниципального совета было записано, что все решения принимаются только единогласно, какое количество фонарей было бы установлено в этом случае, если все расходы на их установку делятся поровну? Было бы оно парето-эффективным? Каковы были бы потери общества?

33.4. «Крупняк» захватил власть в поселке, разогнал муниципальный совет и стал диктатором. Какое количество фонарей он установил бы своим решением и как бы его решение изменило общественное благосостояние при равном распределении расходов на установку фонарей?

6.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Поскольку имеются лишь два блага, то достаточно определить только одну равновесную цену. Цену блага Y примем за счетную цену (*numeraire*), т. е. за 1. Пусть тогда p будет относительной ценой блага X. Следовательно, бюджетное ограничение для индивида 1: $pX_1 + Y_1 = 1$, а для индивида 2: $pX_2 + Y_2 = p$.

Затем индивид 1 выбирает X_1 так, чтобы максимизировать $X_1^{\alpha}(1 - X_1)^{1-\alpha}$. Из условия первого порядка получаем $X_1 = \dfrac{\alpha}{p}$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $X_2 = 1 - \alpha$.

Индивид 2 выбирает X_2, так чтобы максимизировать $X_2^{\beta}(p - pX_1)^{1-\beta}$. Из условия первого порядка получаем $X_2 = \beta$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $Y_2 = p(1 - \beta)$.

Из закона Вальраса известно, что в случае двух рынков равновесие на одном из них означает равновесие и на другом. Выберем для рассмотрения рынок блага X. Тогда $X_1 + X_2 = 1$, или $\dfrac{\alpha}{p} + \beta = 1$. Следовательно, равновесная цена $p^* = \dfrac{\alpha}{1 - \beta}$. Она дает нам равновесное размещение благ между индивидами: $X_1 = 1 - \beta$; $X_2 = 1 - \alpha$; $Y_1 = \beta$; $Y_2 = \alpha$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Цену блага Y примем за счетную цену (*numeraire*), т. е. за 1. Пусть тогда p будет относительной ценой блага X. Следовательно, бюджетное ограничение для индивида A: $pX_A + Y_A = 2p$, а для индивида B: $pX_B + Y_B = 3$.

Индивид A выбирает X_A так, чтобы максимизировать $X_A^{1/2}(2p - pX_A)^{1/2}$. Из условия первого порядка получаем $X_A = 1$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $Y_A = p$.

Индивид B выбирает X_B, так, чтобы максимизировать $X_B^{1/3}(3 - pX_B)^{2/3}$. Из условия первого порядка получаем $X_B = \dfrac{1}{p}$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $Y_B = 2$.

Из закона Вальраса известно, что в случае двух рынков равновесие на одном из них означает равновесие и на другом. Выберем для рассмотрения рынок блага X. Тогда $X_A + X_B = 2$ или $1 + \frac{1}{p} = 2$. Следовательно, равновесная цена $p^* = 1$. Она дает нам равновесное размещение благ между индивидами: $X_A = Y_A = 1$ и $X_В = 1, Y_B = 2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

Цену блага X примем за счетную цену (*numeraire*), т. е. за 1. Затем найдем функции спроса индивидов A и B на благо Y как функции от его цены (p).

$$MRS_{XY}^{A} = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{1}{p} \Rightarrow pY_A = X_A \Rightarrow Y_A = \frac{X_A}{p}.$$

Бюджетное ограничение для индивида A: $X_A + pY_A = m \Rightarrow$ $\Rightarrow X_A = m - pY_A$, где m — доход индивида A.

Отсюда функция спроса на Y индивида A:

$$Y_A = \frac{m - pY_A}{p} = \frac{m}{2p}.$$

Так как изначальное наделение для индивида A — 10 единиц блага Y, то можно определить, что $m = 10p$. Следовательно, индивид A предъявит спрос на 5 единиц блага Y $\left(\frac{10p}{2p} = 5\right)$.

Поскольку блага X и Y для индивида B абсолютно взаимодополняемые, то для него всегда $X_B = Y_B$. Бюджетное ограничение для индивида B: $X_B + pY_B = m \Rightarrow X_B = m - pY_B$, где m — доход индивида B.

Отсюда функция спроса на Y индивида B: $Y_B = \frac{m}{1 + p}$.

Так как изначальное наделение для индивида B — 20 единиц блага X и 5 единиц блага Y, то m индивида B: $20 + 5p$. Следовательно, индивид B предъявит спрос на благо Y, равный:

$$\frac{20 + 5p}{1 + p}.$$

Отсюда следует, что суммарный со стороны индивидов A и B на благо Y:

$$5+\frac{20+5p}{1+p}.$$

Поскольку изначальное наделение благом Y индивида A составляло 5 единиц, а индивида B — 10 единиц, то легко заключить, что суммарное предложение блага Y равно 15 единиц. Отсюда:

$$5+\frac{20+5p}{1+p}=15.$$

Решение этого уравнения дает нам равновесную цену $p^* = 2$. При данной равновесной цене спрос индивида B на благо $Y = 10$. Следовательно, равновесное размещение благ между индивидами: $X_A = 10$, $Y_A = 5$; $X_B = 10$, $Y_B = 10$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

4.1. Определим спрос на Q_1 и Q_2 и выразим его через I. Для этого составляем функцию Лагранжа:

$$V = Q_1^{0.5}Q_2^{0.5} + \lambda(I - P_1Q_1 - P_2Q_2).$$

Максимизируем полезность, для чего находим условия первого порядка:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_1} = 0.5Q_1^{-0.5}Q_2^{0.5} - \lambda P_1 = 0; \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_2} = 0.5Q_1^{0.5}Q_2^{-0.5} - \lambda P_2 = 0; \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = I - P_1Q_1 - P_2Q_2 = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Умножаем обе части уравнения (i) на Q_1 и упрощаем выражение:

$$0.5Q_1^{0.5}Q_2^{0.5} - \lambda P_1Q_1 = 0;$$

$$0.5U - \lambda P_1Q_1 = 0;$$

$$Q_1 = \frac{\alpha U}{\lambda P_1}. \qquad \text{(i}'\text{)}$$

Аналогично умножаем обе части (ii) на Q_2 и упрощаем выражение. Получаем:

$$Q_2 = \frac{0.5U}{\lambda P_2}. \qquad \text{(ii'')}$$

Теперь подставляем (i′) и (ii″) в (iii):

$$I - \frac{0.5P_1U}{\lambda P_1} - \frac{0.5P_2U}{\lambda P_2} = 0;$$

$$\lambda I = 0.5U + 0.5U = U;$$

$$\lambda = \frac{U}{I}. \qquad \text{(iii')}$$

И наконец, подставляем (iii′) назад в (i′) и (ii″), что дает нам функции спроса на товары, выраженные через I:

$$Q_1 = \frac{0.5U}{P_1} \cdot \frac{I}{U} = \frac{0.5I}{P_1} = \frac{0.5(P_L L_1 + P_K K_1)}{P_1};$$

$$Q_2 = \frac{0.5U}{P_2} \cdot \frac{I}{U} = \frac{0.5I}{P_2} = \frac{0.5(P_L L_2 + P_K K_2)}{P_2}.$$

Теперь определим функции предложения товаров. В случае Q_1 необходимо вывести функцию общих затрат из производственной функции. Для этого надо решить задачу на минимизацию этих затрат:

$$Z = P_K K_1 + P_L L + \lambda(Q_1 - K_1^{0.5} L_1^{0.5}).$$

Получаем следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial Z}{\partial K_1} = P_K - 0.5\lambda \; K_1^{-0.5} L_1^{0.5} = 0; \qquad \text{(v)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L_1} = P_L - 0.5\lambda \; K_1^{0.5} L_1^{-0.5} = 0; \qquad \text{(vi)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Q_1 - K_1^{0.5} L_1^{0.5} = 0. \qquad \text{(vii)}$$

Разделив (v) на (vi), получаем:

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{L_1}{K_1},$$

или

$$P_K K_1 = P_L L_1,$$

или

$$K_1 = \frac{P_L L_1}{P_K}.$$

Следовательно $C_1 = P_K K_1 + P_L L_1 = 2P_L L_1$.

Теперь осталось только избавиться от L_1 в данном выражении. Для этого подставляем полученное выше выражение для K_1 в $Q_1 = K_1^{0.5} L_1^{0.5}$:

$$Q_1 = \left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{0,5} L_1.$$

Откуда

$$L_1 = Q_1 \left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{-0.5}.$$

Подставляем выражение для L_1 в функцию общих затрат C_1:

$$C_1 = 2P_K^{0.5} P_L^{0.5} Q_1.$$

Отсюда функция предложения Q_1:

$$P_1 = MC_1 = 2P_K^{0.5} P_L^{0.5}.$$

При совершенной конкуренции $P_1 = MC_1$, а функция предельных издержек есть функция предложения Q_1.

Определим функцию предложения Q_2. Так как в производстве в секторе 2 отсутствует капитал, то ее нахождение значительно упрощается.

$$Z = P_L L_2 + \lambda\left(Q_2 - \frac{3}{2} L_2\right).$$

При совершенной конкуренции на рынке труда:

$$\frac{\partial Z}{\partial L_2} = P_L - \frac{3}{2}\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Q_2 - \frac{3}{2} L_2 = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{3}{2} L_2 = Q_2 \Rightarrow L_2 = \frac{2}{3} Q_2.$$

Теперь для нахождения функции предложения Q_2 надо составить функцию общих затрат C_2.

$$C_2 = P_L L_2 = P_L \frac{2}{3} Q_2.$$

Тогда функция предложения Q_2:

$$P_2 = MC = \frac{2}{3} P_L.$$

Осталось определить спрос на факторы. Для этого применяем лемму Шепарда (см. подсказку к вопросу 4.1):

$$L_1 = \frac{\partial C_1}{\partial P_L} = P_K^{0.5} P_L^{-0.5} Q_1;$$

$$K_1 = \frac{\partial C_1}{\partial P_K} = P_K^{-0.5} P_L^{0.5} Q_1;$$

$$L_2 = \frac{\partial C_2}{\partial P_L} = \frac{2}{3} Q_2.$$

Теперь внесем полученные результаты в таблицу VI.1.

Таблица VI.1

Двухсекторная конкурентная экономика

Рынки товаров		
Товар 1		
Спрос:	$Q_1 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{P_1}$	(1)
Предложение:	$P_1 = 2P_K^{0.5} P_L^{0.5}$	(2)
Товар 2		
Спрос:	$Q_2 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{P_2}$	(3)
Предложение:	$P_2 = \frac{2}{3} P_L$	(4)
Рынки факторов		
Рынок капитала		
Спрос	$K_D = K_1 = P_K^{-0.5} P_L^{0.5} Q_1$	(5)
Предложение	$K_S = 100$	(6)
Рынок труда		
Спрос	$L_D = L_1 + L_2 = P_K^{0.5} P_L^{-0.5} Q_1 + \frac{2}{3} Q_2$	(7)
Предложение	$L_S = 100$	(8)

4.2. Примем цену $P_K = 1$.

В секторе товара 1 подставим в уравнение (1) выражение для P_1 из уравнения (2):

$$Q_1 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{2P_K^{0.5} P_L^{0.5}}.$$

Затем приравняем спрос и предложение на рынке капитала — правые части уравнений (5) и (6), — а затем подставим полученное выше выражение для Q_1:

$$100 = P_K^{-0.5} P_L^{0.5} Q_1;$$

$$100 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{2P_K}.$$

Отсюда получаем:

$$100 = \frac{0.5(100P_L + 100)}{2};$$

$$P_L = 3.$$

Из уравнений (2) и (1) находим:

$$P_1 = 2\sqrt{3} \approx 3.46;$$

$$Q_1 = \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57.74.$$

Теперь легко находим:

$$P_2 = 2; \qquad Q_2 = 100.$$

4.3. Убедимся, что найденные значения равновесных цен товаров и факторов обеспечивают нам равновесие и на рынке труда. Иначе говоря, проверим действие закона Вальраса.

Приравняем спрос на труд к предложению труда:

$$1^{0.5} \cdot (3^{-0.5}) \cdot 57.74 + \frac{2}{3}(100) = 33.333 + 66.667 = 100.$$

4.4. Из (4.3) следует, что в производстве Q_1 задействована $^1/_3$ общего количества располагаемого труда, в производстве Q_2 – $^2/_3$.

Доход труда $P_L L = 3 \cdot 100 = 300$.

Доход капитала $P_K K = 1 \cdot 100 = 100$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Представим исходную комбинацию благ индивида 1 через избыточный спрос $X_1 = E_{x1} + 78$ и $Y_1 = E_{y1}$. Введем избыточный спрос в функцию полезности индивида и максимизируем ее при наличии бюджетного ограничения $(P_x E_{x1} + P_y E_{y1})$.

$$V_1 = (E_{x1} + 78) E_{y1} + 2(E_{x1} + 78) + 5E_{y1} - \lambda(P_x E_{x1} + P_y E_{y1}).$$

Приравняем нулю частные производные по V_1:

$$\partial V_1/\partial E_{x1} = E_{y1} + 2 - \lambda P_x = 0;$$
$$\partial V_1/\partial E_{y1} = E_{x1} + 83 - \lambda P_y = 0;$$
$$\partial V_1/\partial \lambda = -(\ P_x E_{\ x1} + P_y\ E_{y1}) = 0.$$

Решаем систему уравнений и получаем функции избыточного спроса для индивида 1:

$$\lambda = (E_{x1} + 83)/P_y = (E_{y1} + 2)/P_x;$$
$$-E_{x1}P_1 - E_{y1}P_2 = 0;$$
$$E_{y1}P_y + 2P_y = E_{x1}P_x + 83P_x;$$
$$E_{x1} = -E_{y1}P_y/P_x;$$
$$E_{y1} = (E_{x1}P_x + 83P_x - 2P_y)/P_y;$$
$$E_{x1} = -(E_{x1}P_x + 83P_x - 2P_y)/P_x;$$
$$E_{x1} = P_y/P_x - 41.5;$$
$$E_{y1} = 41.5\ P_x\ /\ P_y - 1.$$

Таким образом, избыточный спрос представлен как функции от соотношения цен. Увеличение P_x относительно P_y уменьшит E_{x1} и увеличит E_{y1}. Увеличение P_y относительно P_x увеличит E_{x1} и уменьшит E_{y1}.

Аналогичным образом поступаем с функцией полезности индивида 2.

В итоге решения новой системы уравнений получаем следующие функции избыточного спроса для индивида 2:

$$E_{x2} = 84\ P_y\ /P_x - 1;$$
$$E_{y2} = P_x\ /P_y - 84.$$

В соответствии с требованиями «очищения» рынка можно записать:

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} = 85\ P_y\ /P_x - 42.5 = 0;$$
$$E_y = E_{y1} + E_{y2} = 42.5\ P_x\ /\ P_y - 85 = 0.$$

При решении первого из уравнений имеем $P_y/P_x = 0.5$, а при решении второго — $P_x\ /P_y = 2$, что, как видно, одно и то же.

Подставляем соотношения цен в индивидуальные функции избыточного спроса и получаем:

$$E_{x1} = -41; \quad E_{x2} = 82; \quad E_{y1} = 41; \quad E_{y2} = -82.$$

Индивид 1 отдает 41 единицу блага X индивиду 2 в обмен на 82 единицы блага Y.

Следовательно, парето-эффективная комбинация благ:

$$X_1 = 37; \quad X_2 = 41; \quad Y_1 = 82; \quad Y_2 = 82.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

6.1. Фиксируем полезность индивида 1 и составляем соответствующее уравнение Лагранжа:

$L = U_2(X_2,Y_2) + \lambda[U_1(X_1,Y_1) - \bar{U}_2] = X_2^{2/3}Y_2^{1/3} + \lambda[X_1^{1/3}Y_1^{2/3} - \bar{U}_1]$.

Поскольку то, что получает индивид 2, не получает индивид 1, и наоборот, то, следовательно

$$X_2 = 1000 - X_1;$$
$$Y_2 = 1000 - Y_1.$$

В результате уравнение Лагранжа становится функцией только двух переменных — X_1 и Y_1:

$L = (1000 - X_1)^{2/3}(1000 - Y_1)^{1/3} + \lambda[X_1^{1/3}Y_1^{2/3} - \bar{U}_1]$.

Условия максимума первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1000 - Y_1}{1000 - X_1}\right)^{2/3} + \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{Y_1}{X_1}\right)^{1/3} = 0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1000 - X_1}{1000 - Y_1}\right)^{1/3} + \frac{\lambda}{3}\left(\frac{X_1}{Y_1}\right)^{2/3} = 0.$$

Перенося члены с λ в правую часть и производя деление верхних уравнений на нижние, получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1000 - Y_1}{1000 - X_1}\right) = 2\left(\frac{Y_1}{X_1}\right),$$

или

$$\frac{X_1}{1000 - X_1} = \frac{4Y_1}{1000 - Y_1},$$

что представляет условие эффективности в обмене (равенство MRS^1_{XY} и MRS^2_{XY}).

Теперь можно заполнить таблицу и по значениям X_1 и Y_1 (или X_2 и Y_2) построить контрактную кривую (см. рис. 6.1).

6.2. В результате указанного размещения благ индивиды 1 и 2 получают по 500 единиц полезности каждый (точка S в коробке Эджуорта). На контрактной кривой можно найти такую точку (точка O в коробке Эджуорта), где, например, $X_1 = 660$, $Y_1 = 327$; $X_2 = 340$, $Y_2 = 673$. В этом случае $U_1 = 522$ и $U_2 = 536$.

	X_1	Y_1	$U_1 = X_1^{2/3}\ Y_1^{1/3}$	X_2	Y_2	$U_2 = X_2^{1/3}\ Y_2^{2/3}$
A	0	0	0	1000	1000	1000
B	100	27	65	900	973	948
C	200	59	133	800	941	891
D	300	97	206	700	903	830
E	400	143	284	600	857	761
F	500	200	368	500	800	684
G	600	273	461	400	727	596
H	700	368	565	300	632	493
I	800	500	684	200	500	368
J	900	692	825	100	308	212
K	1000	1000	1000	0	0	0

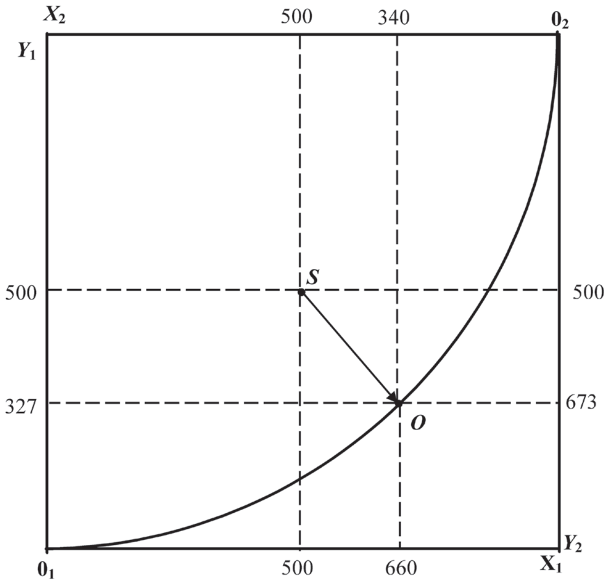


Рис. 6.1. Коробка Эджуорта для «экономики обмена» и контрактная кривая

6.3. $\mathrm{MRS}^1_{XY} = \dfrac{\partial U_1/\partial X_1}{\partial U_1/\partial Y_1} = \dfrac{2Y_1}{X_1}$ и $\mathrm{MRS}^2_{XY} = \dfrac{\partial U_2/\partial X_2}{\partial U_2/\partial Y_2} = \dfrac{Y_2}{2X_2}$.

Индивид 1, таким образом, готов отдавать Y за X, а индивид 2 — наоборот. На рис. 6.1 видно, что при перемещении из точки S в точку A приобретает больше X и меньше Y, а индивид 2 — наоборот.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

7.1. Строим квадрат со сторонами 21×21 (рис. 7.1).

7.2. Из условий задачи находим $U_1^0 = 3600$ и $U_2^0 = 16\,200$. Легко представить кривые безразличия индивидов 1 и 2, например, через X_1 и X_2.

$$Y_1 = 3600/X_1; \qquad Y_2 = 16\,200/X_2$$

Задавая различные значения X_1 и X_2 в интервале от 0 до 210, можно получить соответствующие им значения Y_1 и Y_2. Например, $X_1 = 40$, $Y_1 = 90$; $X_1 = 50$, $Y_1 = 72$; $X_1 = 60$, $Y_1 = 60$; $X_1 = 80$, $Y_1 = 45$; $X_1 = 90$, $Y_1 = 40$; $X_1 = 100$, $Y_1 = 36$. По данным точкам можно построить кривую безразличия для индивида 1 (U_1^0). Аналогичным образом строится кривая безразличия для индивида 2 (U_2^0).

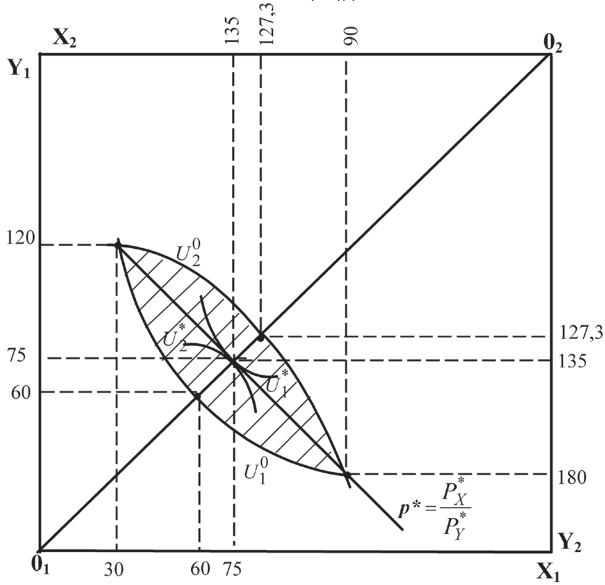


Рис. 7.1. Коробка Эджуорта: общее равновесие и парето-эффективность

7.3. Область внутри кривых безразличия индивидов, включая сами кривые от одной точки их пересечения до другой (см. заштрихованную область на рис. 7.1).

7.4. Для нахождения уравнения контрактной кривой надо помнить, что в любой точке этой кривой имеет место эффективность в обмене, т. е. $MRS^1_{XY} = MRS^2_{XY}$.

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_1}{X_1};$$

$$\mathrm{MRS}^2_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_2}{X_2}.$$

Далее можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{Y_2}{X_2}; \\ X_1 + X_2 = 210; \\ X_1 + X_2 = 210 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$Y_1 = \frac{X_1 Y_2}{X_2} \Rightarrow Y_1 = \frac{X_1(210 - Y_1)}{(210 - X_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 210\ Y_1 - X_1 Y_1 = 210\ X_1 - X_1 Y_1 \Rightarrow X_1 = Y_1$$

Получили уравнение контрактной кривой (на рис. 6.1 – диагональ квадрата, представляющего коробку Эджуорта).

Аналогичный результат получился бы, если бы записали выражение не для Y_1, а для Y_2. Контрактная кривая также представляла бы диагональ квадрата (уравнение $X_2 = Y_2$).

7.5. Найдем координаты точек, в которых кривые безразличия индивидов 1 и 2, проходящие через точку изначального размещения благ, пересекают контрактную кривую.

Для этого составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = Y_1; \\ Y_1 = \dfrac{3600}{X_1}. \end{cases}$$

Получаем $Y_1^2 = 3600 \Rightarrow Y_1 = 60, \quad \mathrm{X}_1 = 60.$

Аналогично:

$$\begin{cases} X_2 = Y_2; \\ Y_2 = \dfrac{16\ 200}{X_2}. \end{cases}$$

Отсюда $Y_2 = 127.3$, $X_2 = 127.3$.

7.6. Индивид 1 максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_1(X_1,Y_1) + \lambda(I_1 - P_X X_1 - P_Y Y_1),$$

где I_1 — бюджет индивида 1. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 1 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_1 = \mathbf{1 \cdot 30} + 2 \cdot 120 = 270$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} - \lambda = 0 \Rightarrow Y_1 = \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_1 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 270 - X_1 - 2Y_1 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 270 \Rightarrow \lambda = 67.5.$$

Отсюда: $Y_1 = 67.5$; $X_1 = 135$.

Индивид 2 также максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_2(X_2,Y_2) + \lambda(I_2 - P_X X_2 - P_Y Y_2),$$

где I_2 — бюджет индивида 2. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 2 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_2 = 1 \cdot 180 + 2 \cdot 90 = 360$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2} - \lambda = 0 \Rightarrow Y_2 = \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_2 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 360 - X_2 - 2Y_2 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 360 \Rightarrow \lambda = 90.$$

Отсюда: $Y_2 = 90$; $X_2 = 180$.

В итоге получаем $X_1 + X_2 = 257.5$ и $Y_1 + Y_2 = 157.5$. Таким образом, благо X окажется в дефиците, а благо Y — в избытке.

Заказанная комбинация благ не будет эффективной, так как не лежит на контрактной кривой. Уравнение контрактной кривой $X_1 = Y_1$ ($X_2 = Y_2$) предполагает, что количество единиц блага X в распоряжении любого из индивидов должно быть равно находящемуся в его же распоряжении количеству единиц блага Y.

7.7. Проводим аналогичные расчеты при $P_X = 2$.

Индивид 1 максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_1(X_1,Y_1) + \lambda(I_1 - P_X X_1 - P_Y Y_1),$$

где I_1 — бюджет индивида 1. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 1 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_1 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 120 = 300$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} - 2\lambda = 0 \Rightarrow Y_1 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_1 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 300 - 2X_1 - 2Y_1 = 0 \Rightarrow 300 = 4X_1.$$

Отсюда: $X_1 = 75$, $Y_1 = 75$.

Индивид 2 также максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_2(X_2,Y_2) + \lambda(I_2 - P_X X_2 - P_Y Y_2),$$

где I_2 — бюджет индивида 2. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 2 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_2 = 2 \cdot 180 + 2 \cdot 90 = 540$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow Y_2 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_2 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 540 - 2X_2 - 2Y_2 = 0 \Rightarrow 4X_2 = 540.$$

Отсюда: $X_2 = 135$, $Y_2 = 135$.

В итоге получаем $X_1 + X_2 = 210$ и $Y_1 + Y_2 = 210$. Таким образом, нет ни избытка, ни дефицита. Рынок «расчищается», и обеспечивается общее экономическое равновесие. Одновременно заказанные комбинации благ находятся на контрактной кривой, следовательно, достигается парето-эффективная комбинация благ.

В последнем легко убедиться, обратившись к условию эффективности в обмене:

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{Y_1}{X_1} = \mathrm{MRS}^2_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{Y_2}{X_2} = 1.$$

Это равенство MRS^1_{XY} и MRS^2_{XY} на рис. 7.1 представлено в точке касания кривых безразличия U_1^* и U_2^*.

При ценах, заданных «секретарем рынка» в п. 7.7:

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{P_X^*}{P_Y^*} = 1 = p^*,$$

где $\frac{P_X^*}{P_Y^*} = p^*$ — относительная равновесная цена. На рис. 7.1 луч, представляющий эту цену, проходит через точку касания кривых безразличия U_1^* и U_2^*.

7.8. $U_1^* = 75 \cdot 75 = 5625$; $U_2^* = 135 \cdot 135 = 18\,225$. При изначальном размещении благ $U_1^0 = 3600$, $U_2^0 = 16\,200$.

Отсюда: $\Delta U_1 = 5625 - 3600 = 2025$; $\Delta U_2 = 18\,225 - 16\,200 = 2025$. Очевидно, что это изменение является парето-улучшением (оба индивида повысили свое благосостояние).

Суммарная полезность индивидов в п. 7.7 составляет $U_1^* + U_2^* = 23\,850$. Суммарная полезность в исходном состоянии $U_1^0 + U_2^0 = 19\,800$. Следовательно, общий прирост полезности $\Delta U = 23\,850 - 19\,800 = 4050$.

Полезность, полученная в п. 7.7, отвечает парето-эффективному состоянию «экономики обмена». Это означит, что ее нельзя повысить за счет изменения размещения благ.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

8.1. Находим, что

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_1}{X_1};$$

$$\mathrm{MRS}^2_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_2}{X_2}.$$

Условие парето-эффективности:

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \mathrm{MRS}^2_{XY} \Rightarrow \frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2} \Rightarrow \frac{Y_1}{X_1} = \frac{10 - Y_1}{10 - X_1}.$$

После перемножения получаем:

$$10Y_1 - Y_1X_1 = 10X_1 - X_1Y_1 \Rightarrow X_1 = Y_1.$$

Отсюда: $U_1 = X_1^{0.5}X_1^{0.5} = X_1 \Rightarrow U_1 = 10 - X_2$.

Аналогично можно показать, что $U_2 = X_2$. В результате получаем уравнение границы возможных полезностей:

$$U_1 = 10 - U_2$$

Эта граница представлена на рис. 8.1

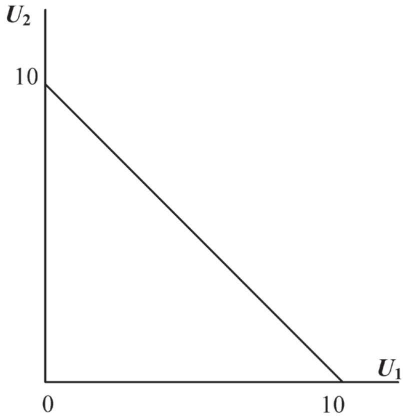


Рис. 8.1. Граница возможных полезностей

8.2. $U_1^0 = 2^{0.5} \cdot 2^{0.5} = 2$; $U_2^0 = 8^{0.5} \cdot 8^{0.5} = 8$.

Легко догадаться, что уравнение контрактной кривой есть $X_1 = Y_1$, или, что то же самое, $X_2 = Y_2$.

См. рис. 8.2. Диагональ квадрата (коробки Эджуорта) 0^10^2 есть контрактная кривая. Точка A — точка изначального размещения благ.

8.3. $\mathrm{MRS}_{XY}^1 = \mathrm{MRS}_{XY}^2 = \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{Y_2}{X_2} = \dfrac{P_X}{P_Y} = p^* = 1.$

Следовательно, относительная равновесная цена (p^*) есть любой луч, пересекающий контрактную кривую под прямым углом. На рис. 8.2 эти лучи проведены через точку A и точку желаемого «секретарем рынка» размещения (точку B), где индивид 1 имеет $X_1 = 6$, $Y_1 = 6$; индивид 2, в свою очередь, обладает $X_2 = 4$, $Y_2 = 4$. Исходя из заданных нам функций полезностей индивидов можно заметить, что в точке B $U_1 = 6$, $U_2 = 4$ (что и нужно «секретарю рынка»).

Используя рис. 8.2, нетрудно заметить, что для достижения нового распределения полезностей между индивидами «секретарю рынка» надо передать индивиду 2 от индивида 1 либо 8 единиц Y_1, либо 8 единиц X_1. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно из точки A провести прямые горизонтальную и вертикальную линии до соединения с лучом, представляющим относительную равновесную цену и пересекающему под прямым углом контрактную кривую в точке B. После указанного перераспределения относительная равновесная цена (p^*) обеспечит автоматический переход в точку B — к желаемому «секретарем рынка» распределению полезностей.

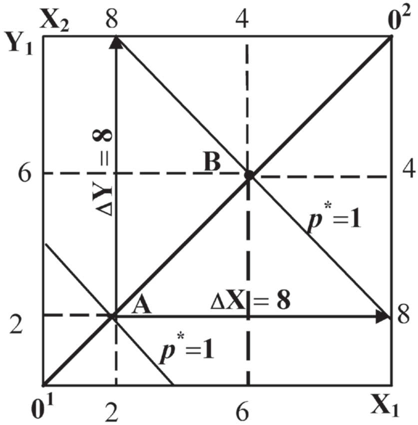


Рис. 8.2. Коробка Эджуорта и перераспределение

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 9

9.1. См. рис. 9.1.

9.2. а) Точка I не является точкой оптимума, так как она не является точкой касания изоквант. Напротив, изокванты X_1 и Y_3 пересекаются в точке I. В точках касания изоквант соблюдается условие парето-эффективности для производства $\left(\mathrm{MRTS}_{LK}^{X} = \mathrm{MRTS}_{LK}^{Y}\right)$.

б) $22.5 + 25 = 47.5$. Отсюда $\Delta K = 70 - 47.5 = 22.5$

$50L_Y$ отвечает $10L_X$. Следовательно, $\Delta \mathrm{L} = 55 - 10 = 45$.

$$\mathrm{MRTS}_{LK}^{X} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{22.5}{45} = 0.5.$$

9.3. Соединяем указанные точки кривой (см. рис. 9.1).

9.4. а) См. рис. 9.2.

б) См. рис. 9.2. Координаты точки I ($X_1 = 40$, $Y_1 = 30$). Нахождение в точке I означает неэффективность, поскольку она находится слева от кривой продуктовой трансформации (границы производственных возможностей). При имеющихся в данной экономике ресурсах можно достичь более высокого объема выпуска.

в) См. рис. 9.2. Нет, не будет. Переход из точки I в точку F сокращает выпуск блага X. Поэтому, несмотря на то что он переводит экономику из неэффективного состояния в эффективное, парето-улучшения не происходит.

9.5. $\mathrm{MRS}_{XY} = \mathrm{MRPT}_{XY} = \dfrac{\Delta X}{\Delta Y} = \dfrac{100}{125} = 0.8.$

9.6. Нет, не обеспечат: $\mathrm{MRPT}_{XY} = \dfrac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \dfrac{P_X}{4} = \dfrac{4}{5}.$

Отсюда $P_X = 3.2$.

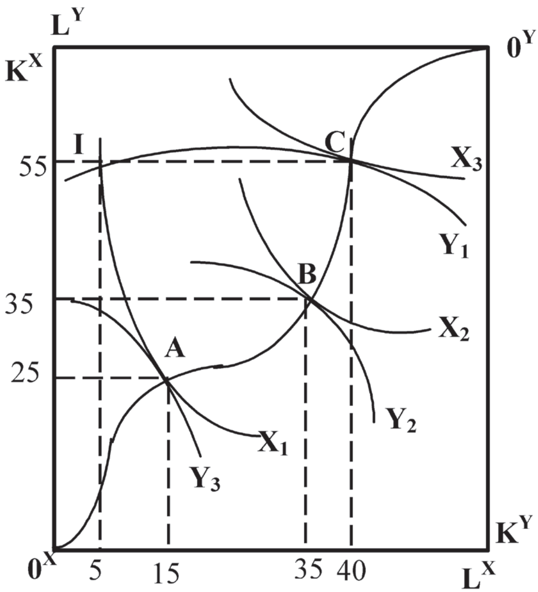


Рис. 9.1. Коробка Эджуорта для производства

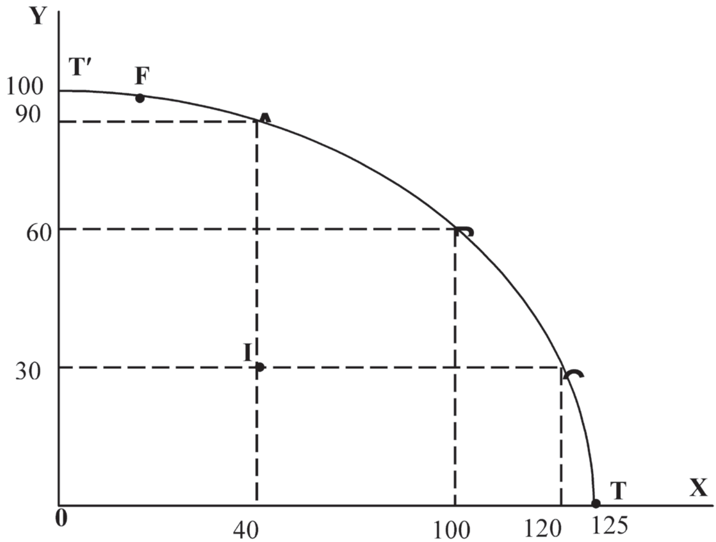


Рис. 9.2. Кривая продуктовой трансформации

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 10

10.1. $$\mathrm{MRTS}_{LK}^{X} = \frac{K_X}{L_X}; \quad \mathrm{MRTS}_{LK}^{Y} = \frac{K_Y}{L_Y};$$

$$\frac{K_X}{L_X} = \frac{2K_Y}{L_Y};$$

$$\frac{K_X}{L_X} = \frac{2(100 - K_X)}{200 - L_X} \Rightarrow 200K_X = 200L_X - L_X K_X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_X(200 - K_X) = 200K_X.$$

Отсюда

$$L_X = \frac{200K_X}{200 - K_X}.$$

Определяем значения L_X при $K_X = 0,\ 25,\ 50,\ 75$ и 100

По имеющимся в условии задачи данным строим коробку Эджуорта для производства, проводим в ней диагональ и по данным таблицы строим контрактную кривую для производства.

L_X	K_X	L_Y	K_Y
0	0	200	100
28.6	25	171.4	75
66.7	50	133.3	50
120	75	80	25
200	100	0	0

10.2. Производство блага X капиталоинтенсивно, так как $\frac{K_X}{L_X} > \frac{K_T}{L_T}$, где K_T и L_T — общие количества капитала и труда. В коробке Эджуорта этот факт отражен расположением вогнутой контрактной кривой для производства выше диагонали.

Капиталоинтенсивность производства блага X вдвое выше капиталоинтенсивности производства блага Y. В этом легко убедиться, рассчитав соответствующие значения L_Y и K_Y (см. таблицу) и сопоставив $\frac{K_X}{L_X}$ и $\frac{K_Y}{L_Y}$ в любых точках (кроме крайних). Например, $\frac{75}{120} : \frac{25}{80} = 2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 11

11.1. Преобразуем уравнение кривой продуктовой трансформации:

$$9Y^2 = 100 - X^2;$$

$$Y^2 = \frac{100 - X^2}{9};$$

$$Y = \frac{1}{3}(100 - X^2)^{0.5}.$$

Теперь находим предельную норму продуктовой трансформации:

$$\text{MRPT}_{XY} = \frac{dY}{dX} = \frac{1}{6}(100 - X^2)^{-0.5}(-2X) = -\frac{X}{3}(100 - X^2)^{-0.5}.$$

11.2. Для вогнутой по отношению к началу координат кривой продуктовой трансформации должны соблюдаться условия: $\frac{dY}{dX} < 0;\ \frac{d^2Y}{dX^2} > 0.$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{6}(100 - X^2)^{-1.5} > 0,$$

так как по условиям задачи $X < 10$ во всех точках кривой, кроме точки ее соединения с осью $0Y$.

Кривая продуктовой трансформации вогнута, если а) имеет место убывающая отдача от масштаба в производстве обоих благ; б) если нарушается допущение об однородности факторов (например, один из факторов производства имеет убывающую производительность в производстве какого-либо блага); в) при допущении об однородности факторов и постоянной отдаче от масштаба выпуск благ требует использования факторов в различных пропорциях (например, производство одного блага — трудоинтенсивное, другого — капиталоинтенсивное, скажем, $\frac{K_X}{L_X} < \frac{K_Y}{L_Y}$).

11.3. $$-\frac{X}{3}(100 - X^2)^{-0.5} = -\frac{4}{7};$$

$$\frac{X^2}{9}(100 - X^2)^{-1} = \frac{16}{49} \Rightarrow (100 - X^2)^{-1} = \frac{144}{49X^2} \Rightarrow$$

$$100 - X^2 = \frac{49X^2}{144} \Rightarrow 193X^2 = 14\ 400 \Rightarrow X^* = 8.64;$$

$$Y^* = \frac{1}{3}(100 - X^2)^{0.5} = \frac{1}{3}(100 - 8.64^2)^{0.5} = 1.68.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 12

12.1 Выражаем L_X и L_Y через X и Y соответственно и получаем уравнение для кривой продуктовой трансформации:

$$X^2 + 4Y^2 = 100.$$

Крайние точки данной кривой: $X = 10$, $Y = 0$; $X = 0$, $Y = 5$. Затем находим общий дифференциал данного уравнения:

$$2XdX + 8YdY = 0,$$

или

$$-\frac{dY}{dX} = MRPT_{XY} = \frac{X}{4Y}.$$

12.2 Условия оптимума (парето-эффективности) предполагают, что $\mathrm{MRPT}_{XY} = \mathrm{MRS}_{XY}$.

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{Y}{X}.$$

Следовательно,

$$\frac{X}{4Y} = \frac{Y}{X};$$

$$X^2 = 4Y^2;$$

$$X^2 + 4Y^2 = 2X^2 = 10.$$

В результате получаем:

$$X^* = \sqrt{50} = 7.07; \qquad Y^* = \sqrt{12.5} = 3.535.$$

Общественная полезность:

$$U = \sqrt{7.07 \cdot 3.535} \approx 5.66.$$

12.3. Поскольку:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{Y^*}{X^*} = \frac{P_X^*}{P_Y^*} = MRPT_{XY},$$

следовательно:

$$\frac{P_X^*}{P_Y^*} = \frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{50}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, предложенные «аукционистом» цены обеспечат парето-эффективность.

Ценность выпуска составит

$$P_X^* X^* + P_Y^* Y = 1 \cdot 7.07 + 2 \cdot 3.535 = 14.14.$$

12.4. В таком случае из уравнения $X^2 + 4Y^2 = 100$ получаем, что $Y^2 = 9 \Rightarrow Y = 3$. При таких значениях:

$$U = \sqrt{8 \cdot 3} \approx 4.9;$$

$$P_X^* X^* + P_Y^* Y = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 14.0.$$

Легко заметить, что в результате отклонения от парето-эффективной комбинации благ общественная полезность и ценность выпуска снизились.

12.5. От подготовки к войне ресурсов не прибавляется, следовательно, граница производственных возможностей и MRPT_{XY} остаются прежними. С ростом «оборонного сознания» меняется только MRS_{XY}.

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{3Y}{X}.$$

Отсюда:

$$\frac{X}{4Y} = \frac{3Y}{X}; \qquad 12Y^2 = X^2.$$

Следовательно:

$$12Y^2 + 4Y^2 = 100;$$
$$Y^* = 2.5; \qquad X^* = 8.66.$$

Соотношение цен:

$$\frac{P_X^*}{P_Y^*} = \frac{X}{4Y} = 0.866.$$

Оно говорит нам о росте относительной цены пушки (если раньше 1 пушка стоила 0.5 одной единицы масла, то теперь приблизительно $^7/_8$ той же единицы масла).

Определим занятость до возникновения напряженности между страной Дураков и страной Баранов. Из условий задачи находим, что $L_X = X^2$; $L_Y = 0.5Y^2$. Из полученных в п. 6.2 значений X^*, Y^* получаем $L_X \approx 50$, $L_Y \approx 6.25$. В условиях подготовки к войне $L_X^W \approx 75$, $L_Y^W \approx 6.25$. Таким образом, изменение занятости в производстве пушек $\Delta L_X = 75 - 50 = 25$, а изменение занятости в производстве масла $\Delta L_Y = 6.25 - 12.5 = -6.25$.

12.6. Теперь $\text{MRS}_{XY} = \dfrac{Y}{3X}$. Отсюда:

$$\frac{X}{4Y} = \frac{Y}{3X}; \qquad 4\text{Y}^2 = 3X^2.$$

Следовательно:

$$X^2 + 3X^2 = 100;$$
$$X^* = 5; \qquad Y^* \approx 4.33;$$
$$\frac{P_X^*}{P_Y^*} = \frac{X}{4Y} \approx 0.289.$$

Очевидно, что цена пушки относительно единицы масла ниже, чем в предыдущих ситуациях ($0.289 < 0.5 < 0.866$).

В условиях долгосрочного мира занятость распределяется следующим образом: $L_X^P = 25$, $L_Y^P \approx 18.75$. Таким образом, изменение занятости в производстве пушек $\Delta L_X = 25 - 75 = -50$, а изменение занятости в производстве масла $\Delta L_Y = 18.75 - 6.25 = 12.5$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 13

13.1. См. ответ на вопрос 13.6.

13.2. $U_A = 200$, $U_B = 0$.

13.3. Оптимальные значения U_A и U_B находятся в точке пересечения луча, выходящего под углом 45° из начала координат (его уравнение $U_A = U_B$), с границей возможных полезностей ($U_A + 2U_B = 200$). Совместное решение этих двух уравнений дает нам $U_A = 66^2/_3$, $U_B = 66^2/_3$.

13.4. Заметим, что $U_A + U_B$ достигает максимума в пределах области достижимых полезностей тогда, когда она соединяется с границей возможных полезностей в точке ницшеанского оптимума. Следовательно, $U_A = 200$, $U_B = 0$.

13.5. «Творец политики» находит следующее решение:

$$L = U_A^{0.5} \cdot U_B^{0.5} + \lambda(200 - U_A - 2U_B);$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_A} = 0.5\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.5\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}};$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_B} = 0.5\frac{U_A^{0.5}}{U_B^{0.5}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0.5\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 200 - U_A - 2U_B = 0 \Rightarrow U_A = 200 - 2U_B.$$

Отсюда:

$$\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}} = 0.5\frac{U_A^{0.5}}{U_B^{0.5}};$$

$$\frac{U_B^{0.5}}{(200 - 2U_B)^{0.5}} = 0.5\frac{(200 - U_B)^{0.5}}{U_B^{0.5}};$$

$2U_B = 200 - 2U_B \;\Rightarrow\; 4U_B = 200 \;\Rightarrow\; U_B = 50,\; U_A = 100.$

13.6. См. ниже рис. 13.1.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 14

14.1. «Творец политики» находит следующее решение

$$L = Y_A^{0.5} + Y_B^{0.5} + \lambda(100 - Y_A - Y_B);$$

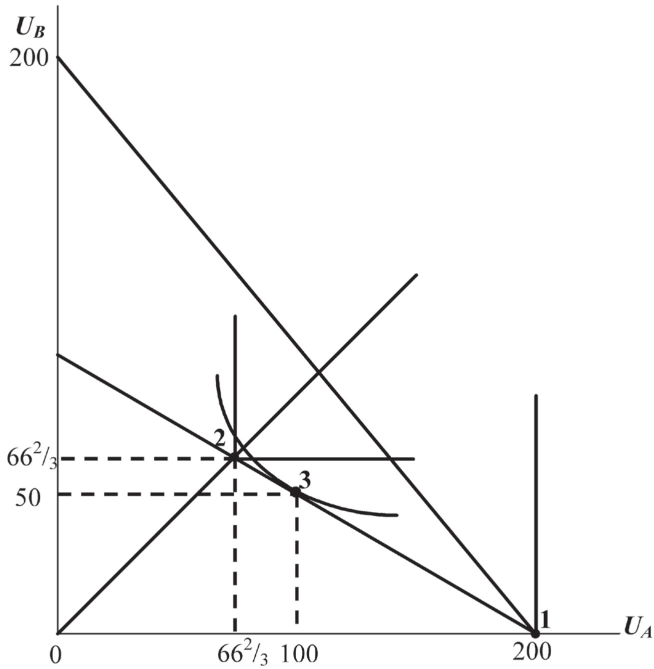


Рис. 13.1. Социальные оптимумы:
(·) 1 — ницшеанский и утилитаристский оптимумы,
(·) 2 — роулсианский оптимум, (·) 3 — оптимум Бернулли–Нэша.

$$\frac{\partial L}{\partial Y_A} = \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} = \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_B} = \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} = \lambda.$$

Отсюда $Y_A = Y_B = 50$.

14.2. Теперь «творец политики» находит следующее решение

$$L = Y_A^{0.5} + Y_B^{0.5} + \lambda(100 - 2Y_A - Y_B);$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_A} = \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} = 2\lambda \Rightarrow \frac{1}{4Y_A} = 4\lambda^2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_B} = \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} = \lambda \Rightarrow \frac{1}{4Y_B} = \lambda^2.$$

Отсюда $Y_B = 4Y_A \Rightarrow Y_B = 80,\ Y_A = 20.$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 15

15.1. Представим функцию общественного благосостояния как $W = \frac{1}{1-e} y_1^{1-e} + \frac{1}{1-e} y_2^{1-e}$. Тогда $dW = y_1^{-e} dy_1 + y_2^{-e} dy_2 = 0.$ Отсюда наклон кривой равного общественного благосостояния $\left.\frac{dy_2}{dy_1}\right|_{dW=0} = -\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^e$.

15.2. $-\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^e = -1$ при $e = 0$, что отвечает утилитаристскому критерию.

15.3. Функция Лагранжа для «творца политики»:

$$L = \frac{1}{1-e}\left[y_1^{1-e} + y_2^{1-e}\right] - \lambda[y_1 + y_2 - 1],$$

и тогда условия первого порядка (кроме ресурсного ограничения):

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = y_i^{-e} - \lambda = 0, \quad i = 1.2.$$

Следовательно, $y_1^{-e} = y_2^{-e}$, что предполагает $y_1 = y_2$. Значение e в данном случае не влияет на оптимальное решение.

15.4. Теперь функция Лагранжа для «творца политики»

$$L = \frac{1}{1-e}\left[y_1^{1-e} + y_2^{1-e}\right] - \lambda[\alpha y_1 + y_2 - 1],$$

и условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = y_1^{-e} - \lambda a = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = y_2^{-e} - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \alpha y_1 - \alpha y_2 = 0.$$

Избавляясь от λ, получаем $y_2^e = \alpha y_1^e$ и $y_2 = 1 - \alpha y_1$. Решая эти уравнения, получаем $y_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\alpha^{\frac{e}{1-e}}}$ и $y_2 = 1 - \frac{1}{1+\alpha^{\frac{e}{1-e}}}$.

Отсюда можно заключить, что рост α снижает y_1 и увеличивает y_2, тогда как рост e, напротив, увеличивает y_1 и снижает y_2. Это можно интерпретировать следующим образом: α измеряет, во что обходится (сколько стоит) перераспределение в пользу индивида 1 (чем выше затраты на него, тем меньше доход индивида). С другой стороны, e измеряет неприятие неравенства «творцом политики»; при $\alpha > 1$ перераспределение в пользу индивида 1 становится дороже, но неприятие неравенства «творцом политики», напротив, направляет перераспределение в пользу индивида 1. Следовательно, при выработке оптимального решения «творец политики» будет взвешивать затраты на перераспределение, с одной стороны, и «ценность» перераспределения с точки зрения его этических установок — с другой.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 16

16.1. Набор достижимых аллокаций $\{(x, y): x + y \leq 100\}$.

16.2. Если (x, y) такие, что $x + y < 100$, то от «пирога» после раздела остается $100 - x - y$ и это может быть передано Адаму, Еве или же им обоим для увеличения их полезности. Однако в таком случае раздел пирога не является парето-эффективным. В результаты можно заключить, что $\{(x, y): x + y = 100\}$ — набор парето-эффективных аллокаций.

16.3. Так как x — это полезность и доход Адама, а y — полезность и доход Евы, то свобода от зависти предполагает, что $x \geq y$ и что $y \geq x$, а это соблюдается только тогда, когда $x = y$. В таком случае набор всех достижимых свободных от зависти аллокаций $\{(x, y): x = y$ и $x + y \leq 100\}$. Следовательно, некоторые свободные от зависти аллокации достижимы, но не являются парето-эффективными.

16.4. Учитывая особые функции полезности, которые линейны по отношению к доходу, предельные полезности дохода обеих индивидов постоянны и равны 1 независимо от величины дохода. Тогда все (x, y), такие что $x + y = 100$, удовлетворяют утилитаристскому критерию. Раз предельная полезность дохода постоянна, то, следовательно, утилитарист не заботится о распределении полезностей. Значит, есть не единственное утилитаристское решение. Набор утилитаристских решений тождественен набору парето-эффективных аллокаций $\{(x, y): x + y = 100\}$.

Напротив, максиминное решение является единственным. Так как следует максимизировать полезность наименее обеспеченного индивида, то $x = y = 50$.

16.5. Нет принципиального различия с предыдущим ответом. Однако должно быть ясно, что «творец политики» здесь может выбрать как только разделение дара в 100 д. е., так и в дополнение использование налога для разделения 50 д. е. Адама. В этом случае надо проводить четкое разграничение между тем, как должен быть разделен дар в 100 д. е. и конечным распределением дохода. Пусть (x, y) будет разделением дара, а $(\hat{x}, \hat{y})$ — конечным распределением дохода. Предположим далее, что «творец политики» может только разделить дар, но не в состоянии ничего сделать по отношению к изначально располагаемой Адамом сумме, т. е. $x \geq 0$. Так как $\hat{x} = 50 + x$, $\hat{y} = y$ и $x + y = 100$, то набор утилитаристких (парето-эффективных) аллокаций $\{(\hat{x}, \hat{y}): \hat{x} + \hat{y} = 150$ и $\hat{x} > 0\}$. Раздел дара не определен, но распределен он должен быть весь $\{(x,y): x + y = 100\}$.

По той же причине максиминное решение относительно конечного распределения $\hat{x} = \hat{y} = 75$. Однако для его достижения «творец политики» даст Адаму из дара только 25 д. е., так как 50 д. е. он уже имеет. Следовательно, максиминное распределение дара $x = 25$, $y = 75$.

16.6. Ресурсное ограничение (набор достижимых аллокаций) может быть представлен как $\{(x,y): 2x + y = 100\}$, поскольку если все отдать Адаму, то он получит только 50 д. е. (половина дара исчезает в процессе перераспределения), тогда как если Ева получает все, то на нее придется 100 д. е.

Задача «творца политики»-утилитариста:

$$\max_{x \geq 0,\, y \geq 0} L = x + y + \lambda(100 - 2x - y).$$

Условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda^* \leq 0 \qquad x^* \geq 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda^* \leq 0 \qquad y^* \geq 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2x^* - y^* = 0.$$

Предположим, что $x^* > 0$. Тогда $\lambda^* = 0.5$. Однако в то же время, из следующего неравенства следует, что $\lambda^* \geq 1$. Из этого противоречия очевидно, что $x^* > 0$ не есть оптимальное решение для «творца политики»-утилитариста. У него остается единственный вариант: $x^* = 0$, $y^* = 100$.

Максиминное решение может быть получено, если заметить, что ресурсное ограничение везде имеет отрицательный наклон. Следовательно, надо найти достижимое распределение, которое уравнивает полезности, т. е. решить систему уравнений:

$$x = y;$$

$$2x + y = 100.$$

Отсюда следует, что Адам получит $66^2/_3$ д. е., Ева — $33^1/_3$ д. е.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 17

17.1. Произведем подсчет полезностей каждого из индивидов в каждом из состояний.

Состояние	U_A	U_B
0	100	100
1	117	117
2	81	169

Состояние 1 превосходит состояние 0 по критерию Парето. Состояние 2 превосходит состояние 0 по критерию Калдора, но не по критерию Парето (состояния 2 и 0 парето-

несравнимые). Состояния 2 и 1 парето-несравнимые, но состояние 2 превосходит состояние 1 по критерию Калдора.

17.2. Простая утилитаристская функция общественной полезности для индивидов A и B есть $W = U_A + U_B$, а роулсианская функция для тех же индивидов $W = \min\{U_A, U_B\}$. В таком случае по утилитаристскому критерию состояние 1 предпочтительнее состояния 0, состояние 2 предпочтительнее состояния 0 и состояние 2 предпочтительнее состояния 1. По критерию Роулса, только состояние 1 предпочтительнее состояния 0, тогда как при переходе из состояния 0 в состояние 2 общественное благосостояние не возрастает, так же как и при переходе из состояния 1 в состояние 2.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 18

18.1. Условие равновесия $w = VMP \Rightarrow w = P \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial L_Y} \Rightarrow 50 = \dfrac{1000}{L_Y^{0.5}} \Rightarrow 2500L_Y = 1\,000\,000 \Rightarrow L_Y = 400$. Отсюда $Y = 40\,000$. Так как производственные функции заводов одинаковы, то $L_x = 400$, $X = 40\,000$.

18.2. Если химзавод создает внешний негативный эффект ($\alpha < 0$), то на его решения о найме и выпуске этот факт никак не повлияет ($L_Y = 400$, $Y = 40\,000$). Однако у пивзавода VMP по этой причине снизится.

Теперь:

$$50 = P\cdot\frac{\partial X}{\partial L_X} = 1000L_X^{-0.5}(Y-38000)^{-0.1} = 1000L_X^{-0.5}(2000)^{-0.1} = 468L_X^{-0.5}$$

Отсюда $L_x = 87$ (вместо 400 ранее), а выпуск $X = 2000(87)^{0.5}(2000)^{-0.1} = 8723$ (вместо 40 000 ранее).

18.3. Поскольку выпуск химзавода $Q(Y)$ равен 38 000, то можно найти L_Y из $38000 = 2000L_Y^{0.5}$. $L_Y = 361$.

Ставку налога можно найти из:

$(1 - t)VMP_L = (1 - t)1000(361)^{-0.5} = 50$.

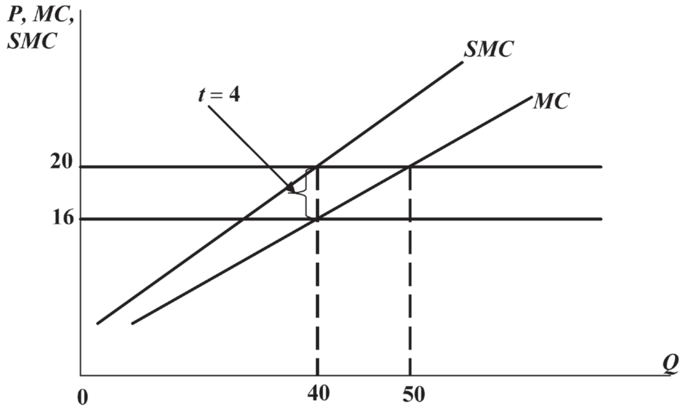
Отсюда $t = 0.05$. Этот налог снизит P_Y до 0.95 и наем на 39 работников. Пивзавод, как и в первом случае, будет выпускать 40 000 единиц продукции и нанимать 400 работников.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 19

19.1. $P = MC \Rightarrow 20 = 0.4Q \Rightarrow Q = 50.$

19.2. $P = SMC \Rightarrow 20 = 0.5Q \Rightarrow Q = 40.$ При общественно оптимальном выпуске ($Q = 40$) $MC = 0.4Q = 0.4 \cdot 40 = 16.$ Отсюда налоговая ставка $t = 20 - 16 = 4.$

19.3.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 20

20.1. Если каждая фирма действует независимо, то частные предельные затраты (MC_1 и MC_2) просто приравниваются к ценам.

$P_1 = MC_1 \Rightarrow 2 = Q_1/50 \Rightarrow Q_1 = 100;$

$P_2 = MC_2 \Rightarrow 3 = 2Q_2/100 \Rightarrow Q_2 = 150.$

20.2. Объединенная фирма максимизирует свою прибыль как разность между общей выручкой и суммарными затратами:

$\pi = 2Q_1 + 3Q_2 - Q_1^2/100 - Q_1^2/100 + Q_1;$

$\partial\pi/\partial Q_1 = 2 - 2Q_1/100 + 1 = 0 \Rightarrow Q_1 = 150;$

$\partial\pi/\partial Q_2 = 3 - 2Q_2/100 = 0 \Rightarrow Q_2 = 150.$

20.3. Полные общие издержки пасеки (TSC_1) должны учитывать ее влияние на снижение издержек выращивания яблок:

$TSC_1 = Q_1^2/100 - Q_1.$

Тогда предельные общественные издержки (MSC_1) можно приравнять к цене и получить общественно эффективный выпуск:

$$MSC_1 = 2Q_1/100 - 1 = 2 \Rightarrow Q_1^* = 150.$$

Чтобы вывести пасеку на общественно эффективный выпуск, можно предоставить ей субсидию на единицу продукции (s). Ее надо вычесть из частных предельных издержек.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 21

21.1. Приравниваем предельные затраты каждого хозяйства к цене и находим выпуск и прибыль при раздельном хозяйствовании:

$$P_1 = MC_1 \quad 15 = 0.2Q_1 + 5 \;\Rightarrow\; Q_1 = 50;$$
$$P_2 = MC_2 \quad 15 = 0.4Q_2 + 7 \;\Rightarrow\; Q_2 = 20;$$
$$\pi_1^{\,0} = P_1Q_1 - \mathrm{TC}_1 = 15{\cdot}50 - 0.1{\cdot}50^2 - 5{\cdot}50 + 0.1{\cdot}20^2 = 290;$$
$$\pi_2^{\,0} = P_2Q_2 - \mathrm{TC}_2 = 15{\cdot}20 - 0.2{\cdot}20^2 - 7{\cdot}20 - 0.025{\cdot}50^2 = 17.5.$$

21.2. С тем чтобы определить оптимальный налог и субсидию на единицу продукции, сначала нужно найти общественно-оптимальную величину выпуска для первого и второго хозяйств. Она находится путем приравнивания к цене предельных *общественных* затрат (MSC). Предельные общественные затраты первого хозяйства учитывают негативный внешний эффект, который его деятельность оказывает на затраты второго, т. е. $0.025Q_1^{\,2}$. Предельные общественные затраты второго хозяйства, напротив, исключают положительный внешний эффект, который его деятельность оказывает на затраты первого, т. е. $0.1\ Q_2^{\,2}$. Тогда:

$$MSC_1 = P_1 \quad 0.2Q_1 + 5 + 0.05Q_1 = 15 \;\Rightarrow\; Q_1^* = 40;$$
$$MSC_2 = P_2 \quad 0.4Q_2 + 7 - 0.2Q_2 = 15 \;\Rightarrow\; Q_2^* = 40.$$

Теперь подсчитаем, какую величину нужно добавить к предельным затратам первого хозяйства (иначе говоря, каким налогом обложить каждую единицу его продукции) и какую величину необходимо вычесть из предельных затрат второго (иначе говоря, какую субсидию предоставить на каждую единицу его продукции) с тем, чтобы и первое, и второе хозяйство вышли на оптимальный выпуск в 40 единиц:

$$0.2Q_1 + 5 + t = 15 \;\Rightarrow\; t = 15 - 5 - 0.2 \cdot 40 = 2;$$
$$0.4Q_2 + 7 - s = 15 \;\Rightarrow\; s = 0.4 \cdot 40 - 15 + 7 = 8.$$

21.3. После объединения двух ранее самостоятельных хозяйств в одно прибыль определяется как:

$$\pi = 15(Q_1 + Q_2) - 0.125\,Q_1^{\,2} - 5Q_1 - 0.1Q_2^{\,2} - 7Q_2.$$

Максимизируем прибыль. Находим частные производные и приравниваем к нулю:

$$\partial\pi/\partial Q_1 = 15 - 0.25Q_1 - 5 = 0;$$
$$\partial\pi/\partial Q_2 = 15 - 0.20Q_2 - 7 = 0.$$

Отсюда $Q_1 = 40$; $Q_2 = 40$ (следовательно, совокупный выпуск = 80) и совокупная прибыль $\pi = 360$. Прирост прибыли по сравнению с прибылью при раздельном хозяйствовании составил $\Delta\pi = 360 - (290 + 17.5) = 52.5$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 22

22.1. $L_X + L_Y = 20$. Отсюда:

$$L_Y = 20 - L_X;$$
$$F_T = F^X + F^Y;$$
$$F_T = 10L_X - 0.5L_X^2 + 5(20 - L_X) = 5L_X - 0.5L_X^2 + 100.$$

Приравниваем средние уловы на озерах X и Y:

$$\frac{F_x}{L_X} = \frac{F_Y}{L_Y} \;\Rightarrow\; 10 - 0.5L_X = 5.$$

Отсюда $\mathrm{L}_X = 10$ и $\mathrm{L}_Y = 10$.

$$F_T = 50 - 0.5(100) + 100 = 100.$$

22.2. $\max F_T : 5L_X - 0.5\,L_X^2 + 100;$

$$\frac{dF_T}{dL_X} = 5 - L_X = 0. \quad L_X = 5,\ F_T = 112.5.$$

22.3. В случае свободного доступа $F_X = 10L_X - 0.5L_X^2 = 10 \cdot 10 - 0.5\,(10)^2 = 50$. Средний улов в этом случае = 50/10 = 5.

В случае ограниченного доступа, обеспечивающего максимальный суммарный улов, $F_X = 10L_X - 0.5\,L_X^2 = 10 \cdot 5 - 0.5\,(5)^2 = 37.5$. Средний улов в этом случае = 37.5/5 = 7.5.

Цена лицензии равна разности между средними уловами, т. е. 2.5.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 23

23.1. Из условий задачи очевидно, что $AC = MC = 50\,000$

Тогда объем добычи при совершенной конкуренции будет выбран при равенстве $AR = MC$.

$$AR = \frac{PQ}{N}.$$

Объем добычи из каждой скважины (q):

$$q = \frac{Q}{N} = 5000 - N.$$

Тогда $AR = 50q = 250\,000 - 50N = 50\,000$. В результате

$$N = 4000; \quad q = 5000 - 4000 = 1000.$$

Отсюда следует, что равновесная добыча

$$qN = 1000 \cdot 4000 = 4\,000\,000.$$

Общественные предельные затраты выше частных, поскольку имеет место негативный внешний эффект — добыча из еще одной скважины снижает добычу из всех остальных.

23.2. Общественно эффективный объем производства будет при условии $VMP = MC$. Общая выручка (TR) равна $PQ = 250\,000N - 50N^2$. Отсюда $VMP = 250000 - 100N = 50000 \Rightarrow \Rightarrow N = 2000$.

Далее, $q = 5000 - 2000 = 3000$. Общая добыча $qN = 3000 \cdot \cdot 2000 = 6\,000\,000$. Таким образом, заметим, что количество скважин сократилось на 1000, добыча из каждой скважины выросла на 2 тыс. баррелей, а общая добыча — на 2 млн баррелей.

23.3. Обозначим цену лицензии как T (так как цена лицензии есть, в сущности, налог на доступ к добыче). Тогда $AR - T = MC$. При $N = 2000$, $AR = 50 \cdot 3000 = 150\,000$. Следовательно, цена лицензии (T) $= 150\,000 - 50\,000 = 100\,000$ USD.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 24

24.1. Фабрика максимизирует свою прибыль при $X = 6$. Находится из $\dfrac{\partial\pi}{\partial X} = 1200 - 200X = 0$.

Отсюда $U(Y_i, X) = 9Y - Y_i^2 - 6Y_i \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial Y} = 9 - 2Y - 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Y = 1.5$ часа.

24.2. $U(Y_i,X) = 9 \cdot 1.5 - 1.5^2 - 1.5X$. Отсюда $\frac{\partial U}{\partial X} = -1.5$. Это можно интерпретировать как готовность каждого индивида заплатить 1.5 д. е. за каждую единицу снижения сброса сточных вод.

24.3. Так как озером пользуются 1000 индивидов, то их суммарная готовность заплатить за это $1000 \cdot 1.5 = 1500$ д. е.

При $X = 6$ прибыль фабрики $\pi = 1200 \cdot 6 - 100 \cdot 36 = 7200 - 3600 = 3600$. Если фабрика снизит сброс сточных вод на 1 единицу, то ее прибыль сократится до $\pi = 1200 \cdot 5 - 100 \cdot 25 = 6000 - 2500 = 3500$. Таким образом, фабрика потеряет 100 д. е. прибыли. Однако потребители озера готовы заплатить 1500 д. е. Очевидно, что средств им хватит.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 25

25.1. $U(c, l) = 1 - 1^2 = 0$.

25.2. $U(c, l) = s - (s)^2 = {}^3/_{16}$. На эту величину увеличится полезность каждого потребителя. Следовательно, будет иметь место улучшение.

25.3. Если каждый потребляет одно и то же количество блага, то $c = l$. Следовательно, $U(c) = c - c^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial c} = 1 - 2c = 0 \Rightarrow c = {}^1/_2$.

25.4. Потребуется кооперация между всеми 100 владельцами коттеджей.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 26

26.1.
$$\frac{\partial \pi_a}{\partial X} = 48 - 2X = 0 \Rightarrow X = 24;$$
$$\frac{\partial \pi_d}{\partial Y} = 60 - 2Y - X = 0 \Rightarrow Y = 18.$$

Отсюда $\pi_a = 48 \cdot 24 - 24^2 = 1152 - 576 = 576$, а $\pi_d = 60 \cdot 18 - 18^2 - 24 \cdot 18 = 1080 - 324 - 432 = 324$.

$$\pi_a + \pi_d = 576 + 324 = 900.$$

26.2. $X = 0 \Rightarrow \pi_d = 60Y - Y^2 \cdot \dfrac{\partial \pi_d}{\partial Y} = 60 - 2Y = 0 \Rightarrow Y = 30.$ $\pi_d = 60 \cdot 30 - 30^2 = 900.$

26.3. После полной компенсации ущерба от шума $\pi_d = 60Y - Y^2 - XY + XY = 60\ Y - Y^2$. В результате $Y = 30$, $\pi_d = 900$.

$$\pi_a = 48X - X^2 - XY = 48X - X^2 - 30X.$$

$\dfrac{\partial \pi_a}{\partial X} = 48 - 30 - 2X = 0 \Rightarrow X = 9$, $\pi_a = 81$. $\pi_a + \pi_d = 900 + 81 = 981$

26.4. $\pi_\Sigma = \pi_a + \pi_d = 48X - X^2 + 60Y - Y^2 - XY.$

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial X} = 48 - 2X - Y = 0 \Rightarrow Y = 48 - 2X$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial Y} = 60 - 2Y - X = 0 \Rightarrow 60 - 2(48 - 2X) - X = 0 \Rightarrow X = 12.$$

Отсюда $Y = 48 - 2 \cdot 12 = 24$.

$$\pi_\Sigma = \pi_a + \pi_d = 48 \cdot 12 - 12^2 + 60 \cdot 24 - 24^2 - 12 \cdot 24 = 1008.$$

26.5. После сокращения полетов на 1 единицу $\pi_a = 48 \cdot 23 - 23^2 = 1104 - 529 = 575$. Таким образом, π_a снижается на 1 д. е.

После снижения числа полетов до 23

$$\pi_d = 60 \cdot 18 - 18^2 - 23 \cdot 18 = 1080 - 324 - 414 = 342.$$

Таким образом, π_d возрастает на 18 д. е. Очевидно, что после полной компенсации ущерба аэропорту от сокращения полетов на 1 единицу чистая прибыль девелопера остается выше на 17 д. е.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 27

27.1. Выпуск находится из уравнений: $P_1 = MC_1$ и $P_2 = MC_2$.

$$40 = 15 + 0.5Q_1 \Rightarrow Q_1 = 50.\ 90 = 5 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = 85;$$

$$\pi_1 = 40 \cdot 50 - 10 - 15 \cdot 50 - 0.25 \cdot 50^2 = 615;$$

$$\pi_2 = 90 \cdot 85 - 5 - 5 \cdot 85 - 0.5 \cdot 85^2 - 50^2 = 1107.5;$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 615 + 1107.5 = 1722.5.$$

27.2. $\pi_1 = 40Q_1 - 10 - 15Q_1 - 0.25\,Q_1^2$.

Находим предельную прибыль (предельную выгоду) фирмы 1

$$B_1'(Q_1) = \frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 40 - 15 - 0.5Q_1 = 25 - 0.5Q_1;$$

$$\pi_2 = 90Q_2 - 5 - 5Q_2 - 0.5\,Q_2^2 - Q_1^2 .$$

Находим предельный ущерб фирмы 2 от деятельности фирмы 1 (отрицательную предельную прибыль):

$$D_2'(Q_1) = -\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_1} = 2Q_1.$$

Оптимально определить выпуск там, где $B_1'(Q)_1 = D_1'(Q)_1$. Поэтому $25 - 0.5Q_1 = 2Q_1 \Rightarrow Q_1 = 10$. Отсюда плата фирмы 1 ($f$) за выпуск единицы продукции (Q_1) = $D_2'(Q_1) = 2 \cdot 10 = 20$ д. е.

Далее определяем:

$$\pi_1 = 40Q_1 - 10 - 15Q_1 - 0.25\,Q_1^2 - 20Q_1 =$$
$$= 40 \cdot 10 - 10 - 15 \cdot 10 - 0.25 \cdot 10^2 - 20 \cdot 10 =$$
$$= 400 - 385 = 15 \text{ д. е.}$$

Теперь осталось определить:

$$\pi_2 = 90Q_2 - 5 - 5Q_2 - 0.5\,Q_2^2 - Q_1^2 + 20Q_1 =$$
$$= 90 \cdot 85 - 5 - 5 \cdot 85 - 0.5 \cdot 85^2 - 10^2 + 20 \cdot 10 = 3707.5 \text{ д. е.;}$$
$$\pi_1 + \pi_2 = 15 + 3707.5 = 3722.5.$$

Графически решение представлено на рис. 27.1

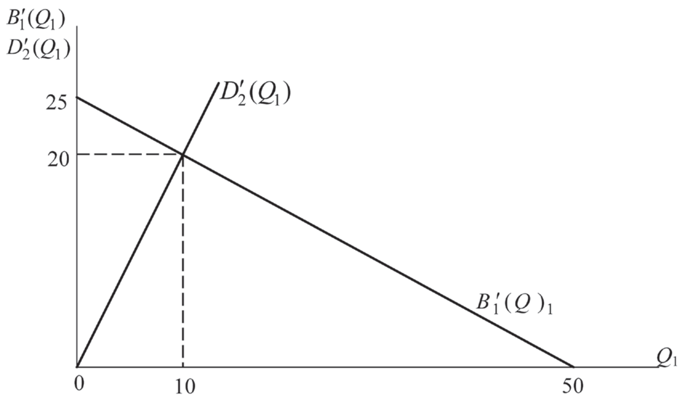


Рис. 27.1. Коузианское решение

27.3. Аналогично путем приравнивания предельной выгоды к предельному ущербу находим, что $Q_1 = 10$, а оптимальная «взятка» (b) за сокращение выпуска на единицу продукции также равна 20 д. е.

Отсюда

$$\pi_2 = 90 \cdot 85 - 5 - 5 \cdot 85 - 0.5 \cdot 85^2 - 10^2 - 20\,(50 - 10) = 2707.5;$$

$$\pi_1 = 40 \cdot 10 - 10 - 15 \cdot 10 - 0.25 \cdot 10^2 + 20 \cdot (50 - 10) = 1015;$$
$$\pi_1 + \pi_2 = 1015 + 2707.5 = 3722.5.$$

27.4. Составим уравнение для прибыли объединенной фирмы

$$\pi_\Sigma = 40Q_1 + 90Q_2 - 10 - 15Q_1 - 0.25Q_1^2 - 5 - 5Q_2 - 0.5Q_2^2 - Q_1^2;$$

$$\frac{\partial \pi_\Sigma}{\partial Q_1} = 25 - 2.5Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = 10;$$

$$\frac{\partial \pi_\Sigma}{\partial Q_2} = 85 - Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = 85.$$

$$\pi_\Sigma = 40Q_1 + 90Q_2 - 10 - 15Q_1 - 0.25Q_1^2 - 5 - 5Q_2 - 0.5Q_2^2 - Q_1^2 = 3722.5.$$

27.5.

№ п/п	Q_1	Q_2	π_1	π_2	π_Σ
1	50	85	615	1107,5	1722,5.
2	10	85	15	3707,5	3722,5
3	10	85	1015	2707,5	3722,5
4	10	85	–	–	3722,5

Теорема Коуза выполняется. И запретительный, и разрешительный правовые режимы приводят к парето-эффективности, что подтверждает совпадение результатов коузианских сделок с результатами объединенной фирмы. Неэффективность наблюдается только в первом случае.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 28

28.1. Кривые спроса на общественное благо складываются по вертикали. Для этого удобнее пользоваться обратными функциями спроса: $P = 100 - Q_A$ и $P = 200 - Q_B$. Отсюда получаем, что при выпуске от 0 до 100 $P = 300 - 2Q_\Sigma$. При выпуске от 100 и до 200 спрос на это благо предъявляет только группа B и, соответственно, ее спрос тогда совпадает с общественным спросом на общественное благо, т. е. $P = 200 - Q_B$.

При $P = MC = 140 = 200 - Q_B \Rightarrow Q_B = 60$ не попадает в интервал от 100 до 200. В данном случае очевидно, что оптимальное количество общественного блага находится в интервале от 0 до 100.

$$140 = 300 - 2Q_\Sigma.$$

Отсюда $Q^*_\Sigma = 80$.

28.2. В случае частного блага кривые спроса складываются по горизонтали. Получаем совокупный спрос $Q_B = 300 - 2P$ при цене от 0 до 100. при цене от 100 до 200, совокупный спрос совпадает со спросом группы B, т. е. $Q_B = 200 - P$.

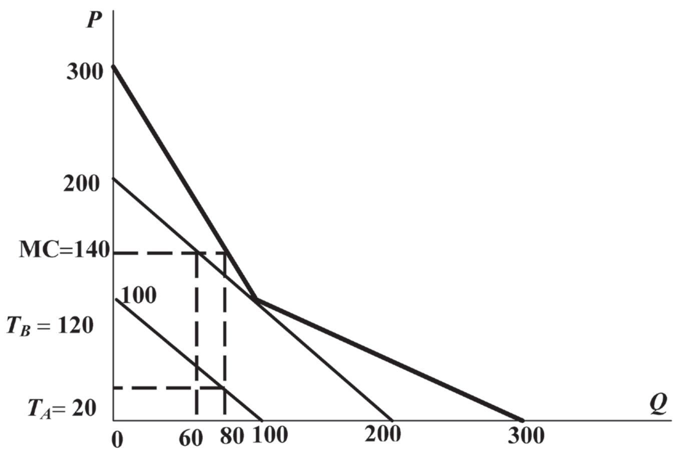
Поскольку $P = MC = 140$, то совокупный спрос совпадает со спросом группы B. Следовательно, $Q_B = 200 - 140 = 60$.

28.3. $Q^*_\Sigma. = 80$, а $P = 140 \Rightarrow T = P \cdot Q^*_\Sigma. = 140 \cdot 80 = 11200$ д. е.

$100 - P_A = 80$. В этом случае P_A есть налоговая цена (T_A) общественного блага для группы A. Очевидно, что $T_A = 20$.

$$200 - P_B = 80 \Rightarrow P_B = T_B = 120.$$

28.4.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 29

29.1. Оптимальные распределения дохода на покупки благ каждым из раздельно живущих студентов $I_G = {}^1/_3$ и $I_X = {}^2/_3$ (следует из степенных коэффициентов функции Кобба-Дугласа). Следовательно, $G_i = 100/100 = 1$, а $X_i = 200/0.2 = 1000$.

29.2. $U_A(G, X_A) = 1^{1/3} \cdot 1000^{2/3} = 100$; $U_B(G, X_B) = 1^{1/3} \cdot 1500^{2/3} = 131$

29.3. $\mathrm{MRS}^i_{G,X_i} = \dfrac{X_i}{2G}$.

$$\mathrm{MRS}^A_{G,X} = 1000/2 = 500; \ \mathrm{MRS}^B_{G,X} = 1500/2 = 750.$$

Это говорит о том, что вместе они готовы пожертвовать $1250X$ за $1G$, то есть пожертвовать 1250 ккал за еще 1 картину, которая в действительности обошлась бы им в 500 ккал (из того, что $P_G / P_X = 500$). При том же бюджете они могли бы обеспечить чистый выигрыш в полезности, приобретя дополнительную картину. Следовательно, ситуация не является парето-эффективной.

29.4. $\mathrm{MRS}^A_{G,X} + \mathrm{MRS}^B_{G,X} = \dfrac{X_A + X_B}{2G} = MRT_{G,X} = \dfrac{P_G}{P_X} = 500.$

Следовательно, $X_A + X_B = 1000G$.

Бюджетное ограничение $0.2(X_A + X_B) + 100G = 600$. Подставляем $1000G$ и получаем $G = 2$. Отсюда $X_A + X_B = 2000$. При условии, что студенты делят расходы на картины пополам, получаем:

$$U_A = U_B = 2^{1/3} \cdot 1000^{2/3} = 126 \Rightarrow U_A + U_B = 252.$$

По сравнению с исходом ситуации из вопроса 30.2 студент *B* теряет 5 единиц полезности. Следовательно, переход в парето-эффективное состояние здесь не является парето-улучшением. Поэтому студенту *B* выгоднее быть «безбилетником».

29.5. Если студент *A* берет на себя 75% расходов на 2 картины, а студент *B* — 25%, то студенту *A* удастся приобрести только 750 ккал. $[300 - (0.75 \cdot 200)]/0.2$. Студент *B* окажется в состоянии приобрести 1250 ккал. Отсюда:

$$U_A = 2^{1/3} \cdot 750^{2/3} = 104$$
$$U_B = 2^{1/3} \cdot 1250^{2/3} = 146$$
$$U_A + U_B = 250.$$

По сравнению с исходом ситуации из вопроса 30.2 студент *A* приобретает 4 единицы полезности, а студент *B* теряет — 15 единиц полезности. Имеет место парето-улучшение, но парето-эффективность не достигается (сумма полезностей, как видим, меньше, чем в исходе ситуации из вопроса 30.4). Теоретически это положение может быть достигнуто на основе добровольного обмена.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 30

30.1. Ответ на вопрос требует какого-то предположения о том, каковы ожидания каждого относительно оплаты общественного блага другим. Если каждый исходит из предположения, что другие будут безбилетниками, то тогда, естественно, $G = 0$ и $U_i = 0$.

30.2. На границе производственных возможностей выполняется равенство в дифференциалах $2XdX + 200GdG = 0$. Из него следует:

$$MRT_{G,X} = -\frac{dX}{dG} = \frac{200G}{2dX} = \frac{100G}{X}.$$

Далее находим $\mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{X_i}{G} = \frac{X/100}{G}$.

Парето-эффективность требует, чтобы сумма всех MRS равнялась MRT. Отсюда $\sum_{i=1}^{100} \mathrm{MRS}_i = \frac{X}{G} = \frac{100G}{X} \Rightarrow X = 10G.$

Подставляем в выражение для границы возможных полезностей и получаем: $200G^2 = 5000 \Rightarrow G = 5,\ X = 50.$

$X_i = X/100 = 0.5$. Следовательно, полезность каждого индивида

$$U_i = 5^{0.5} \cdot 0.5^{0.5} = 1.57.$$

Отношение потоварного налога на единицу блага X для финансирования оптимального количества G к рыночной цене X должна быть равна $\mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{X_i}{G} = \frac{1}{10}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 31

31.1. Для ответа на этот вопрос найдем $\mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{MU_G}{MU_X}$;

$$MU_G = \frac{\partial U}{\partial G} = \frac{100}{G^2};\ MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = 1 \Rightarrow \mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{100}{G^2}.$$

Находим далее $MRT_{G,X} = \frac{P_G}{P_X} = 10;$ отсюда

$$\sum_{i=1}^{1000} MRS^i_{G,X} = \frac{100\,000}{G^2} = 10 \Rightarrow G = 100.$$

31.2. $P_G \cdot G = 10 \cdot 100 = 1000$ д. е. $\Rightarrow$ каждый житель будет тратить на общественное благо 1 д. е. из своего дохода в 1000 д. е. При $P_X = 1$ д. е. на оставшиеся 999 д. е. своего дохода каждый житель будет покупать 999 единиц частного блага.

31.3. Бюджетное ограничение каждого жителя может быть записано как $X_i + G/100 = 1000$. Каждый житель максимизирует свою полезность при данном бюджетном ограничении. Следовательно

$$L = X_i - 100/G + \lambda(1000 - X_i - G/100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{100}{G^2} - \lambda \frac{100}{10\,000} = 0 \Rightarrow 100G^2 = 1\,000\,000 \Rightarrow G = 100.$$

Каждый житель проголосует за парето-эффективное количество.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 32

32.1. (б). Яхт-клуб предпочтительнее больницы, больница — моста. Кроме того, в паре яхт-клуб–мост побеждает яхт-клуб.

32.2. (г) Возникает «парадокс голосования» (нетранзитивность коллективного предпочтения): мост предпочтительнее яхт-клуба, яхт-клуб — больницы, а больница — моста.

32.3. Строительство моста, так он предпочтительнее яхт-клуба, а яхт-клуб — больницы.

32.4. Строительство больницы, так как она предпочтительнее моста, а мост — яхт-клуба. Имеет место манипулирование голосованием через повестку дня.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 33

33.1. Будет установлено 30 фонарей. За это предложение проголосуют «Крупняк», «Здоровяк» и «Середняк». За 40 фонарей проголосуют только «Здоровяк» и «Крупняк», а «Середняк» будет голосовать против, так как его предельные выгоды (80) стали бы меньше падающих на него расходов (100).Количество фонарей будет парето-эффективным, так как $\Sigma MB = MC = AC = 500$.

33.2. В таком случае было бы принято предложение установить 40 фонарей. Это их количество превышает парето-эффективное. Затраты «С роду так» будут равны его предельным выгодам (40). Затраты «Бедняка» на 1 фонарь будут ниже его предельной выгоды от него на 10 единиц. Однако более всего выиграет «Середняк» — 20 единиц с каждого фонаря. Закон Директора выполняется, так как «Середняк» занимает позицию медианного избирателя. «Крупняк» и «Здоровяк» проиграли бы. Им пришлось бы выплачивать в сумме 350 д. е. за каждый фонарь, тогда как их суммарные предельные выгоды равны лишь 220. Следовательно, их чистые потери от каждого фонаря составили бы 130 единиц.

33.3. При правиле единогласия было бы установлено только 10 фонарей. Предложение установить 20 фонарей было бы заблокировано «С роду так». Естественно, что оно не было бы парето-эффективным. Общество недополучало бы в сумме 200 единиц полезности с каждого фонаря $(180 - 100) + (160 - 100) + (140 - 100) + (120 - 100) = 200$.

33.4. Если бы «Крупняк» стал диктатором, то было бы установлено 50 фонарей. Легко убедиться, что потери общества были бы точно такими же, как и при правиле единогласия.