ПРИЛОЖЕНИЕ 8А

Средние затраты как среднее значение функции

Понятие средних затрат и их взаимосвязь с предельными нуждаются в дополнительном обсуждении. Важно прежде всего понять, что средние затраты вовсе *не* являются некой средней из ряда независимых случайных величин. Если средние затраты при выпуске 100 единиц продукции составляют 1000 руб., то это совсем *не* значит, что одна ее единица обходится, скажем, в 800, другая в 1200 руб. и т.п. В действительности, когда мы говорим о средних затратах, мы имеем в виду *среднее значение функции затрат* от объема выпуска.

Если какая-либо функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в замкнутом промежутке (a, b), то, согласно теореме Лагранжа, среднее ее значение в этом промежутке равно значению производной $f'(x)$ в некоторой точке ξ, лежащей внутри данного промежутка:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{8A.1}$$

Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа заметим, что левая часть (8А.1) есть *угловой коэффициент секущей*, проходящей через точки A $(a, f(a))$ и B $(b, f(b))$ кривой $y = f(x)$, а правая часть есть *угловой коэффициент касательной* к той же кривой в точке C $(\xi, f(\xi))$. Теорема Лагранжа о среднем значении функции утверждает, что на кривой $y = f(x)$ между точками A и B всегда найдется такая точка C, касательная к которой параллельна секущей AB (рис. 8А.1).

Используем теперь теорему Лагранжа для определения *средних переменных* затрат. На основании (8А.1) мы можем утверждать, что сред-

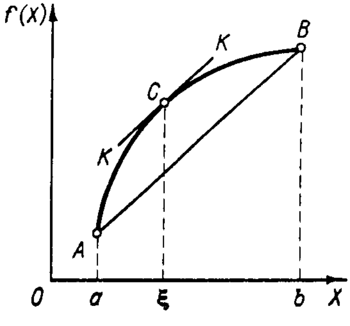

Рис. 8А.1. Геометрическое истолкование теоремы Лагранжа.

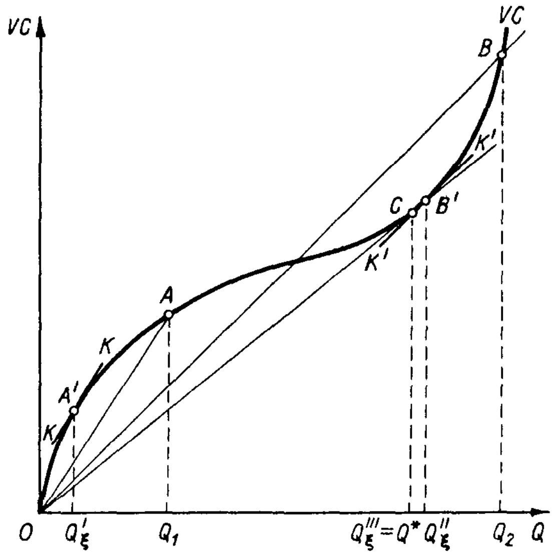

Рис. 8А.2. Средние переменные затраты как среднее значение функции общих переменных затрат.

ние переменные затраты при выпуске Q_i, т.е. в интервале (Q_0, Q_i), равны предельным затратам при некотором неопределенном объеме выпуска Q_ξ, причем $Q_0 \le Q_\xi \le Q_1$, т.е.

$$AVC(Q_0, Q_i) = \frac{VC(Q_i) - VC(Q_0)}{Q_i - Q_0} = \\ = VC'(Q_\xi) = MC(Q_\xi), \tag{8A.2}$$

при этом $Q_\xi \le Q_i$. Как явствует из рис. 8А.2,

$$\begin{aligned} &AVC(Q_1) = MC(Q'_\xi), && Q'_\xi < Q_1 && (OA\|KK), \\ &AVC(Q_2) = MC(Q''_\xi), && Q''_\xi < Q_2 && (OB\|K'K'), \\ &AVC(Q^*) = MC(Q'''_\xi), && Q'''_\xi = Q^*. \end{aligned} \tag{8A.3}$$

К тем же выводам можно прийти и на основе формулы конечных приращений:

$$VC(Q_0 + \Delta Q) - VC(Q_0) = VC'(Q_\xi)\Delta Q, \tag{8A.4}$$

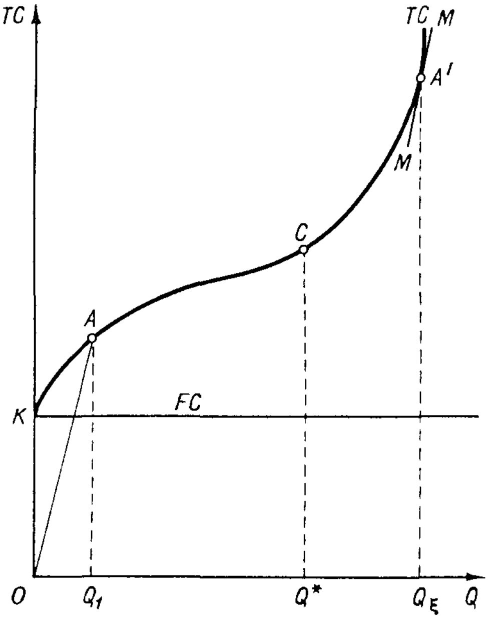

Рис. 8А.3. Средние общие затраты как среднее значение функции общих затрат.

или на основе теоремы о среднем интегрального исчисления, согласно которой определенный интеграл равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке внутри этого промежутка.

Рассмотрим теперь *средние общие* затраты. Среднее значение функции общих затрат $TC(Q)$ составит

$$ATC(Q_0, Q_\imath) = \frac{TC(Q_\imath) - TC(Q_0)}{Q_\imath - Q_0} = TC'(Q_\xi) = MC(Q_\xi). \qquad (8A\ 5)$$

При всем сходстве (8А.2) и (8А.5) обратим внимание и на важное различие. Для средних общих затрат $Q_\xi \gtreqless Q_\imath$.

Остановимся на случае, когда $Q_\xi > Q_\imath$. Заметим, что, поскольку $TC = FC + VC$, кривая TC на рис. 8А.3 *включает и сегмент* $OK = FC$, т.е. имеет правосторонний предел. Поэтому на дуге KA *не найдется* точки, касательная в которой была бы параллельна лучу OA. Но такая точка (A') найдется значительно *правее* точки A, так что

Таблица 8А.1

Расчет средних и предельных затрат (руб.)

Q	FC	VC	TC(2+3)	AVC(3:1)	ATC(4:1)	$MC \times$ $\times(TC_Q - TC_{Q-1})$
1	2	3	4	5	6	7
0	100.0	—	100.00	—	—	—
1	100.0	10.00	110.00	10.00	110.00	10.00
2	100.0	16.00	116.00	8.00	58.00	6.00
3	100.0	21.00	121.00	7.00	40.33	5.00
4	100.0	26.00	126.00	6.50	31.50	5.00
5	100.0	30.00	130.00	6.00	26.00	4.00
6*	100.0	36.00	136.00	6.00*	22.67	6.00*
7	100.0	45.50	145.50	6.50	20.78	9.50
8	100.0	56.00	156.00	7.00	19.50	10.50
9	100.0	72.00	172.00	8.00	19.10	16.00
10	100.0	90.00	190.00	9.00	19.00	18.00
11*	100.0	109.00	209.00	9.91	19.00*	19.00*
12	100.0	130.40	230.40	10.87	19.20	21.40
13	100.0	160.00	260.00	12.31	20.00	29.60
14	100.0	198.20	298.20	14.16	21.30	38.20
15	100.0	249.50	349.50	16.69	23.30	51.30
16	100.0	324.00	424.00	20.25	26.50	74.50
17	100.0	418.50	518.50	24.62	30.50	94.50
18	100.0	539.00	639.00	29.94	35.50	120.50
19	100.0	698.00	798.00	36.74	42.00	159.00
20	100.0	900.00	1000.00	45.00	50.00	202.00

в данном случае $Q_\xi > Q_1$. Заметим, что по мере смещения точки A вправо точка A' будет смещаться влево, пока их взаимное расположение относительно точки C, в которой $ATC(Q^*) = MC(Q^*)$, не сменится на противоположное.

Эти зависимости легко проследить в табл. 8А.1, сопоставляя последовательно значения MC с AVC и ATC. В частности, можно убедиться, что

$$AVC(Q_i) \approx MC(Q_j), \quad i,j = 1,2,\ldots,20, \qquad (8А.6)$$

$$Q_i > Q_j \quad \text{для всех } i,j \neq 6;$$

$$\begin{aligned} &ATC(Q_i) \approx MC(Q_j), \\ &Q_i < Q_j \quad \text{для всех } i < 11,\ j > 11, \\ &Q_i > Q_j \quad \text{для всех } i > 11,\ j < 11, \\ &Q_i = Q_j \quad \text{для } i, j = 11 \end{aligned} \tag{8A 7}$$

Обратим также внимание на то, что среднее значение функции, или средние затраты, являются обычно фиктивной, счетной средней; они могут совпадать, а могут и не совпадать ни с одним значением предельных.[1] Поэтому равенства (8A.6) и (8A.7) выполняются обычно лишь как приближенные, в том числе и для Q^*.

[1]К средним счетным, или фиктивным, относятся те средние, значение которых не встречается в данной совокупности, тогда как реальная, или действительная, средняя соответствует хотя бы одному из ее членов. Примером фиктивной, или счетной, средней является средняя арифметическая трех чисел — 1, 2, 6. Она равна 3 и не совпадает ни с одним из этих чисел (*Джини К.* Средние величины. М., 1970. С. 64).